

Pr. Cabri I056

Enunciado

Sea ABC un triángulo equilátero, y sea Ω su circunferencia inscrita de radio r .

Sea P un punto arbitrario de la misma.

Construyamos los equiláteros PAD, PBE, PCF, y los APM, BPN, CPO.

Probar que los triángulos DEF y MNO son equivalentes a ABC

Probar que las circunferencias circunscritas a DEF y a MNO son tangentes a Ω , tienen sus centros en Ω y sus radios son $2r$.

Barroso, R. (2022)

Solución

de César Beade Franco

Consideremos el triángulo $A(0,2)$, $B(-\sqrt{3}, -1)$ y $C(\sqrt{3}, -1)$ equilátero cuya circunferencia inscrita está centrada en $I(0,0)$ y tiene radio 1.

En este caso P es de la forma $P(\cos w, \sin w)$ con $w \in (0, 2\pi)$.

Giramos A, B y C en sentido horario alrededor de P y obtenemos

$D\left(\frac{1}{2}(\cos[w] - \sqrt{3}(-2 + \sin[w])), \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3}\cos[w] + \sin[w])\right)$,

$E\left(\frac{1}{2}(\cos[w] - \sqrt{3}(2 + \sin[w])), \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3}\cos[w] + \sin[w])\right)$ y

$F\left(\frac{1}{2}(\cos[w] - \sqrt{3}\sin[w]), \frac{1}{2}(-4 + \sqrt{3}\cos[w] + \sin[w])\right)$.

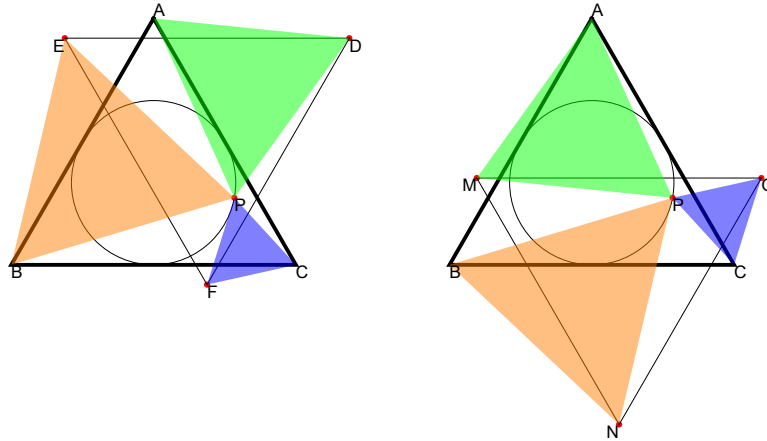
Y si hacemos en sentido antihorario,

$M\left(\frac{1}{2}(\cos[w] + \sqrt{3}(-2 + \sin[w])), \frac{1}{2}(2 - \sqrt{3}\cos[w] + \sin[w])\right)$, N

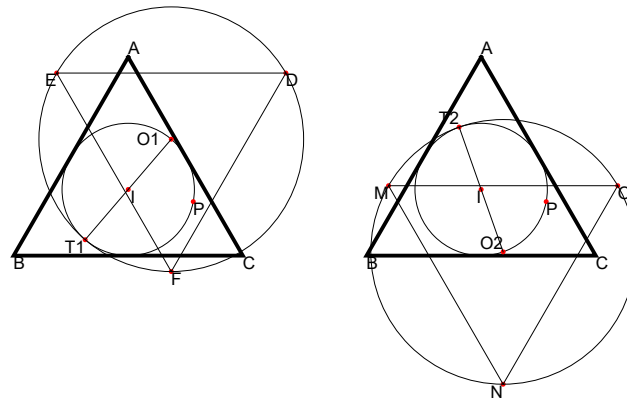
$\left(\frac{1}{2}(\cos[w] + \sqrt{3}\sin[w]), \frac{1}{2}(-4 - \sqrt{3}\cos[w] + \sin[w])\right)$ y

$O\left(\frac{1}{2}(\cos[w] + \sqrt{3}(2 + \sin[w])), \frac{1}{2}(2 - \sqrt{3}\cos[w] + \sin[w])\right)$.

Estos dos triángulos tienen lados paralelos al ABC. Por ejemplo $\overrightarrow{ED} = (2\sqrt{3}, 0) = \overrightarrow{BC}$ lo que indica además que esos lados tienen la misma longitud. Así pues DEF y MNO son equiláteros equivalentes a ABC.



Calculamos las circunferencias circunscritas a DEF y MNO que denominamos α y β . Lógicamente estas circunferencias tienen radio 2 y sus centros son respectivamente, $O1(\cos(w + \frac{\pi}{3}), \sin(w + \frac{\pi}{3}))$ y $O2(\cos(w - \frac{\pi}{3}), \sin(w - \frac{\pi}{3}))$, situados sobre Ω . Sus puntos diametralmente opuestos respecto a Ω , $T1(\cos(w - \frac{2\pi}{3}), \sin(w - \frac{2\pi}{3}))$ y $T2(\cos(w + \frac{2\pi}{3}), \sin(w + \frac{2\pi}{3}))$ pertenecen también a α y β , respectivamente por lo que son puntos de tangencia de cada una de estas circunferencias con Ω .



Como el ángulo $\angle PIO1$ mide 60° el triángulo $\triangle PIO1$ es equilátero y por el mismo motivo lo es $\triangle PIO2$.

Se puede demostrar que por A, B, C, D, E y F pasa una cónica, lo mismo que por A, B, C, M, N y O.

