Problema 409 (Gaceta V.24, nº1)

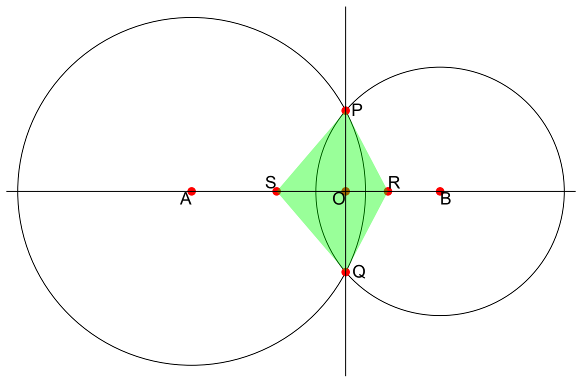
Enunciado

Dados los radios a y b y la distancia entre los centros, c, de dos circunferencias intersecantes, encontrar el área del cuadrilátero formado por las rectas tangentes en los puntos de intersección de ambas.

Propuesto por Joaquín Nadal, LLagostera, Gerona.

Solución

Sean O (0,0) la intersección de los ejes central y radical de las circunferencias y P(0,p) y Q(0,-p) sus interseciones.
Si A y B son sus centros, aplicando el teorema de Pitágoras y dado que AP=a y BP=b , resulta que A=($-\sqrt{a^2-p^2}$,0) y B=($\sqrt{b^2-p^2}$,0).
R(r,0) y S(-s,0) son los puntos de corte de las tangentes por P y Q entre sí y con el eje central. Calculamos sus abscisas recordando que AP y PR son perpendiculares, lo mismo que BP y PS.
Así pues $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{PR}=0 \Rightarrow (P-A).(R-P)=0 \Rightarrow (-\sqrt{a^2-p^2},p).(r,-p)=0 \Rightarrow r=\frac{p^2}{\sqrt{a^2-p^2}}$ y análogamente $s=\frac{p^2}{\sqrt{b^2-p^2}}$.



El área del cuadrilátero PRQS es $|RS|.|OP|=\left(\frac{p^2}{\sqrt{a^2-p^2}}+\frac{p^2}{\sqrt{b^2-p^2}}\right)p$.

Como $|AO|.|OB|=\sqrt{a^2-p^2}+\sqrt{b^2-p^2}=c$, resolviendo la ecuación obtenemos que $p=\pm\frac{\sqrt{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}}{2c}$, con lo que el área anterior queda en función de a, b y c como $\frac{((a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)(a+b+c))^{3/2}}{2(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)}$