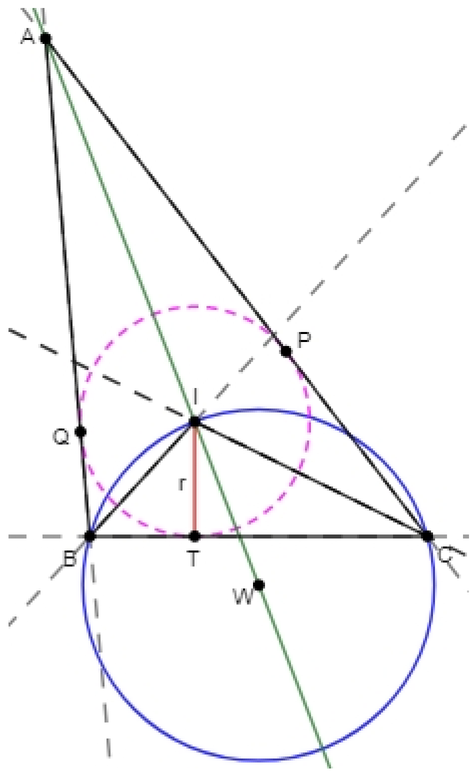
Ejercicio 3728. Sea ABC cuyo ángulo A es mayor que 90º. Las rectas simétricas de BC con respecto a AB y AC se cortan en D. Demostrar que la recta DA contiene al circuncentro del triángulo ABC.

(Fase local OME 2022, 14 de enero de 2022, Castilla y León)

Solución:

Podemos reescribir el enunciado de este ejercicio de la siguiente forma: " Dado un triángulo ABC con incentro I, demostrar que la bisectriz AI contiene al circuncentro del triángulo IBC ". Vamos a hacerlo de dos formas distintas:



① Considerando el sistema de referencia cartesiano de ejes rectangulares con origen en el punto T, eje de abscisas en la recta BC y eje de ordenadas en la recta TI y llamando $u=\dfrac{a+b-c}{2}$ y $v=-\dfrac{a-b+c}{2}$, resulta que:

$$\begin{cases} T=(0,0) \\ B=(v,0) \\ C=(u,0) \\ I=(0,r) \end{cases}$$

por lo que la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo IBC es:

$$x^2+y^2-(u+v)x-\left(\frac{r^2+uv}{r}\right)y+uv=0$$

siendo su centro el punto $W=\left(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{r^2+uv}{2r}\right)$.

Además, las ecuaciones de las rectas polares de estos dos puntos con respecto al incírculo del triángulo ABC, cuya ecuación es:

$$x^2 + (y-r)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2ry = 0$$

son:

$$\begin{cases} p_B \equiv 0 = \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r \\ 0 & 1 & 0 \\ -r & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = vx - ry \\ p_C \equiv 0 = \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r \\ 0 & 1 & 0 \\ -r & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ 0 \end{pmatrix} = ux - ry \end{cases}$$

por lo que los puntos de contacto de las rectas tangentes al incírculo trazadas desde los puntos B y D están determinados por las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} \begin{cases} 0 = x^2 + y^2 - 2ry \\ 0 = vx - ry \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = (0,0) \\ Q = \left(\dfrac{2r^2 v}{v^2 + r^2}, \dfrac{2rv^2}{v^2 + r^2} \right) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 = x^2 + y^2 - 2ry \\ 0 = ux - ry \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = (0,0) \\ P = \left(\dfrac{2r^2 u}{v^2 + r^2}, \dfrac{2ru^2}{v^2 + r^2} \right) \end{cases} \end{cases}$$

siendo:

$$\begin{cases} BA \equiv BQ \equiv 0 = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & v & 0 \\ 1 & \dfrac{2r^2 v}{v^2 + r^2} & \dfrac{2rv^2}{v^2 + r^2} \end{vmatrix} = \dfrac{v[2rvx + (v^2 - r^2)y - 2rv^2]}{v^2 + r^2} \\ BC \equiv CP \equiv 0 = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & u & 0 \\ 1 & \dfrac{2r^2 u}{v^2 + r^2} & \dfrac{2ru^2}{v^2 + r^2} \end{vmatrix} = \dfrac{v[2rux + (u^2 - r^2)y - 2ru^2]}{u^2 + r^2} \end{cases}$$

y, como $A = BA \cap CA$, entonces, las coordenadas del punto A están determinadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = 2rvx + (v^2 - r^2)y - 2rv^2 \\ 0 = 2rux + (u^2 - r^2)y - 2ru^2 \end{cases} \Rightarrow A = \left(\dfrac{r^2(u+v)}{r^2 + uv}, \dfrac{2ruv}{r^2 + uv} \right)$$

Finalmente, como:

$$\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{r^2(u+v)}{r^2 + uv} & \dfrac{2ruv}{r^2 + uv} \\ 1 & 0 & r \\ 1 & \dfrac{u+v}{2} & \dfrac{r^2 + uv}{2r} \end{vmatrix} = 0$$

entonces, los puntos A, I y W están alineados, es decir, el punto W está situado sobre la bisectriz AI.

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

② Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como la ecuación de una circunferencia general que pase por los puntos B y C es de la forma:

$$c^2xy + b^2xz + a^2yz - ux(x+y+z) = 0 \ (u \in \mathbb{R})$$

imponiendo que pase por el punto $I = (a : b : c)$, obtenemos que $u = bc$, por lo que la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo IBC es:

$$0 = c^2xy + b^2xz + a^2yz - bcx(x+y+z) = -bcx^2 + c(c-b)xy + b(b-c)xz + a^2yz$$

estando las coordenadas de su centro W (conjugado de la recta del infinito) determinadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2bc & c(c-b) & b(b-c) \\ c(c-b) & 0 & a^2 \\ b(b-c) & a^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2bc & c(c-b) & b(b-c) \\ c(c-b) & 0 & a^2 \\ b(b-c) & a^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}\right. \Rightarrow W = (-a^2 : b(b+c) : c(b+c))$$

Finalmente, como:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ -a^2 & b(b+c) & c(b+c) \end{vmatrix} = 0$$

entonces, los puntos A, I y W están alineados, es decir, el punto W está situado sobre la bisectriz AI.

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega