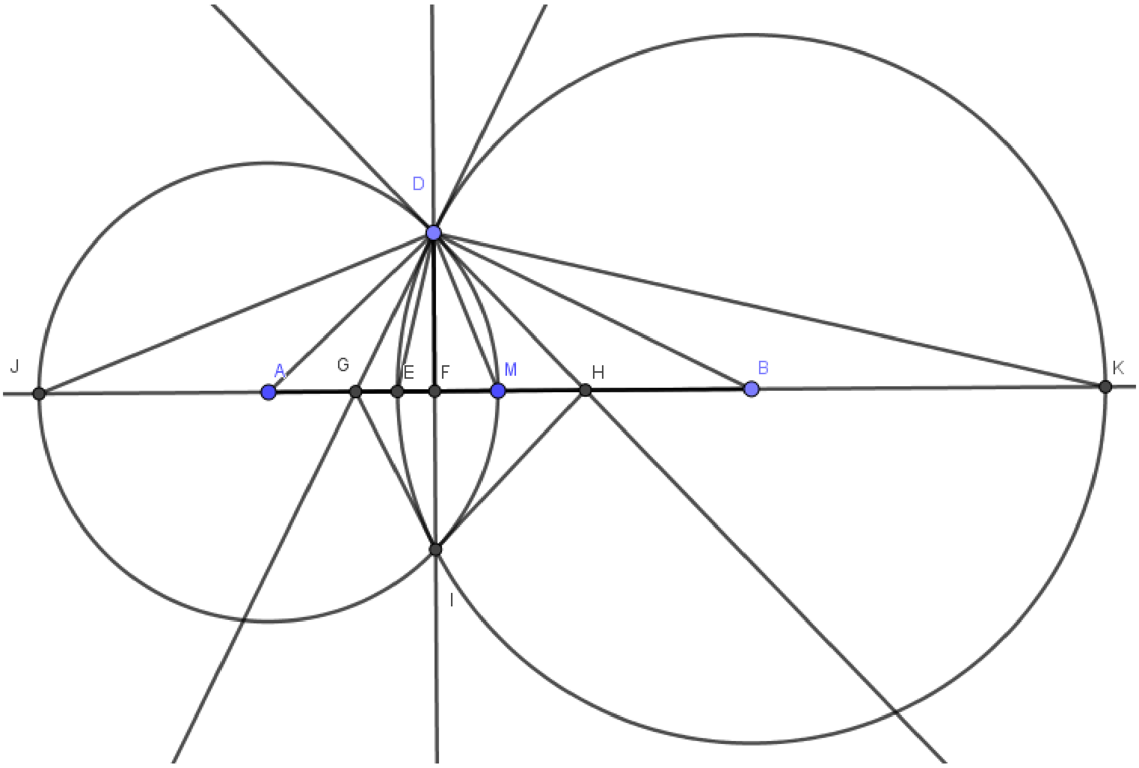
PROBLEMA 409. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*

Dados los radios a y b y la distancia entre los centros, c, de dos circunferencias intersecantes, encontrar el área del cuadrilátero formado por las rectas tangentes en los puntos de intersección de ambas.

Solución de Ricardo Barroso Campos. Sevilla.



Es a+b=c+EM , EM=a+b-c Sea: DF=h , GE=u, EF=t, FM=EM-t=a+b-c-t, v=MH.

Tenemos que por ser GDB triángulo rectángulo,

(1) DF^2=GF FB , h^2=(t+ u)(b-t)

Por ser EDK triángulo rectángulo,

(2) DF^2=EF FK, h^2=t(2b-t)

Al ser ADH triángulo rectángulo es:

(3) DF^2=AF FH, h^2=(c-b +t)(a+b-c-t+v)

Por ser JDM triángulo rectángulo es:

(4) DF^2=JF FM, h^2=(a-b+c+t)(a+b-c-t)

De (2) y de (4), obtenemos :

$$2tb - t^2 = a^2 + ab - ac - at - ba - b^2 + bc + bt + ca + cb - c^2 - ct + ta + tb - tc - t^2$$

$$t = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{2c}$$

De (1) y (2) obtenemos

t b $-t^2$ +bu –tu=2bt $-t^2$ -> $u = \frac{b\,t}{b-t} = \frac{a^2b-b^3-bc^2+2b^2c}{-a^2+b^2+c^2}$

Operando con (2) y (3) obtenemos que

$$v = \frac{b^2 + c^2 - ac - at + a\,b - 2bc + 2\,ct}{c - b + t}$$

Y sustituyendo t,

$$v = \frac{-a^3 + 2a^2c + ab^2 - ac^2}{a^2 - b^2 + c^2}$$

A partir de (2), podemos obtener h:

$$h = \sqrt{t(2b-t)} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{2c}\left(2b - \frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{2c}\right)}$$

Al ser DGIH un cuadrilátero tipo cometa su área es DI GH

DI=2 h

GH=GE+ EF+FM+MH= u +t+ (a+b-c-t) +v=u+v+a+b-c

$[DGHI] = 2\sqrt{\frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{2c}\left(2b - \frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{2c}\right)}\left[\left(\frac{a^2b-b^3-bc^2+2b^2c}{-a^2+b^2+c^2}\right) + \left(\frac{-a^3+2a^2c+ab^2-ac^2}{a^2-b^2+c^2}\right) + a + b - c\right]$.