Problema . Sea ABC un triángulo isósceles tal que $\measuredangle BAC = \dfrac{5\pi}{9}$. La bisectriz del ángulo $\measuredangle CBA$ corta al lado AC en el punto D. Probar que:

$$BD + DA = BC$$

(LVIII OME, 1 de abril de 2022)

Solución:

Vamos a hacerlo de dos formas distintas:

① Como $\measuredangle BAC = \dfrac{5\pi}{9} > \dfrac{\pi}{2}$, necesariamente, ha de ocurrir que $b = c$, por lo que:

$$\begin{cases} S_A = \dfrac{2b^2 - a^2}{2} \\ S_B = S_C = \dfrac{a^2}{2} \end{cases}$$

Además, considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como $D = (a : 0 : b)$, resulta que:

$$\begin{cases} AD^2 = \dfrac{b^4}{(a+b)^2} \Rightarrow AD = \dfrac{b^2}{a+b} \\ BD^2 = \dfrac{a^2 b(a+2b)}{(a+b)^2} \end{cases}$$

por lo que:

$$BD^2 - (BC - DA)^2 = \frac{a^2 b(a+2b)}{(a+b)^2} - \left(a - \frac{b^2}{a+b}\right)^2 = -\frac{a^3 - 3ab^2 + b^3}{a+b}$$

y, por tanto:

$$BD + DA = BC \underset{DA<BC}{\overset{\measuredangle ACB = \frac{2\pi}{9} < \frac{\pi}{2}}{\Leftrightarrow}} BD^2 = (BC - DA)^2 \Leftrightarrow a^3 - 3ab^2 + b^3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^3 - 3\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0$$

siendo, según el Teorema del Coseno:

$$a^2 = 2b^2\left[1 - \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)\right] \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2\left[1 - \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)\right] \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{2\left[1 - \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)\right]}$$

Basta, pues con probar que $\cos\left(\dfrac{5\pi}{9}\right)$ es una raíz de la ecuación:

$$\left[\sqrt{2(1-x)}\,\right]^3 - 3\sqrt{2(1-x)} + 1 = 0$$

lo cual vamos a hacer a continuación. Como el polinomio de Chebyshev para $n = 9$ es:

$$T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$$

y:

$$T_9\left[\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)\right] = \cos(5\pi) = -1$$

entonces, $\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)$ es una de las raíces de la ecuación:

$$0 = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x - 1 = (x+1)(2x-1)^2(8x^3 - 6x - 1)^2$$

y, como $-1 \neq \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) \neq \frac{1}{2}$, resulta que es una de las tres raíces de la ecuación:

$$0 = 8x^3 - 6x - 1 = -\left[\left[\sqrt{2(1-x)}\right]^3 - 3\sqrt{2(1-x)} + 1\right]\left[\left[\sqrt{2(1-x)}\right]^3 - 3\sqrt{2(1-x)} - 1\right]$$

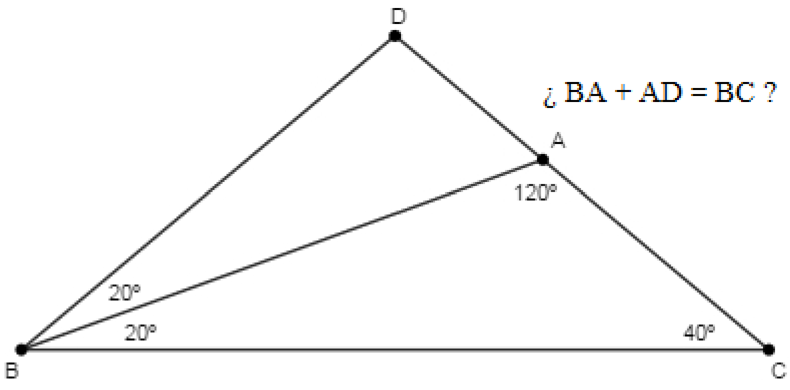
Finalmente, el Teorema de Bolzano nos asegura que:

- ☺ La ecuación $\left[\sqrt{2(1-x)}\right]^3 - 3\sqrt{2(1-x)} + 1 = 0$ tiene, al menos, dos raíces reales.
- ☹ La ecuación $\left[\sqrt{2(1-x)}\right]^3 - 3\sqrt{2(1-x)} - 1 = 0$ tiene, al menos, una raíz real, en el intervalo $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$, que no contiene a $\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)$, ya que $\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) > \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

y, como la ecuación $8x^3 - 6x - 1 = 0$ tiene, exactamente, tres raíces reales, entonces, $\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)$ no es raíz de la ecuación $\left[\sqrt{2(1-x)}\right]^3 - 3\sqrt{2(1-x)} - 1 = 0$ y, por tanto, es raíz de la ecuación:

$$\left[\sqrt{2(1-x)}\right]^3 - 3\sqrt{2(1-x)} + 1 = 0$$

② Intercambiando los papeles de los puntos A y B:



y considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como:

$$\left\{\begin{array}{l} AB \equiv z = 0 \\ BC \equiv x = 0 \end{array}\right. \underset{\text{simetría axial}}{\Rightarrow} BD \equiv c^2x + (a^2 - b^2 + c^2)z = 0$$

entonces:

$$D = BD \cap CA = (a^2 - b^2 + c^2 : 0 : -c^2)$$

por lo que:

$$AD^2 = \frac{b^2c^4}{(a^2-b^2)^2} \underset{a>b}{\Rightarrow} AD = \frac{bc^2}{a^2-b^2}$$

Además:

☺ Como:

$$S_C = S_{2B} = S\cot(2B) = S\left(\frac{\cot^2 B - 1}{2\cot B}\right) = S\left(\frac{\frac{S_B^2}{S^2}-1}{\frac{2S_B}{S}}\right) = \frac{S_B^2 - S^2}{2S_B}$$

entonces:

$$0 = S_C - \frac{S_B^2 - S^2}{2S_B} = \frac{(ab+b^2-c^2)(ab-b^2+c^2)}{a^2-b^2+c^2} \underset{b<c}{\Rightarrow} a = \frac{c^2-b^2}{b}$$

☹ Como, según el Teorema del Coseno:

$$\left(\frac{c^2-b^2}{b}\right)^2 = a^2 \underset{*}{=} b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = b^2 + c^2 + bc$$

entonces:

$$0 = \left(\frac{c^2-b^2}{b}\right)^2 - (b^2+c^2+bc) = \frac{c(b^3+3b^2c-c^3)}{b^2} \Rightarrow b^3 + 3b^2c - c^3 = 0$$

Finalmente, como:

$$AD - (BC - BA) = \frac{bc^2}{a^2-b^2} - (a-c) = \frac{(c-b)\left(\underline{b^3+3b^2c-c^3}\right)}{b(c^2-2b^2)} = 0$$

entonces:

$$AD = BC - BA \Rightarrow BA + AD = BC$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega