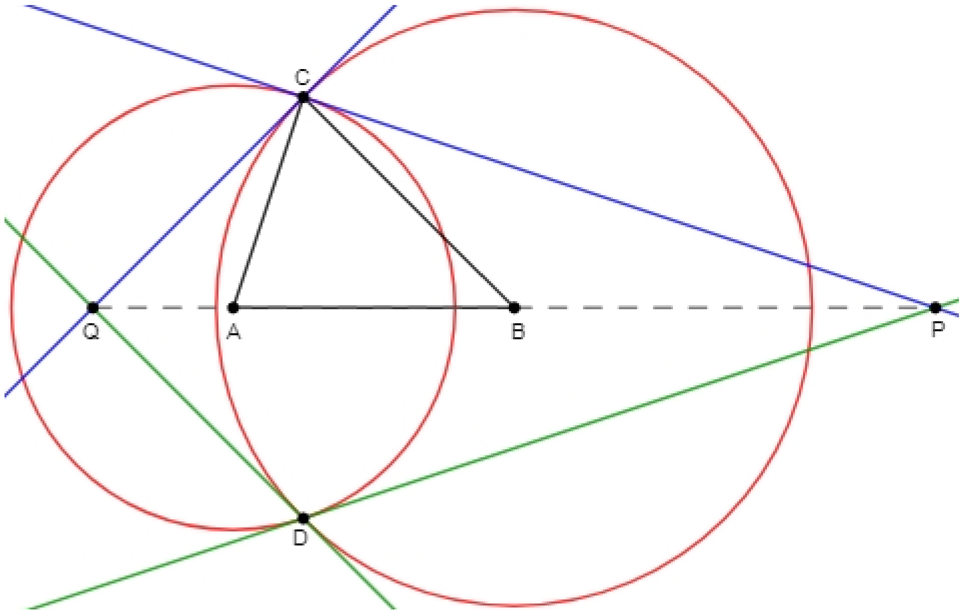
Ejercicio 3746. Dados los radios a y b y la distancia entre los centros, c, de dos circunferencias intersecantes, encontrar el área del cuadrilátero formado por las rectas tangentes en los puntos de intersección de ambas.

(La Gaceta de la RSME, Vol. 25 (2022), Núm. 1, Ejercicio 409)

Solución:



Llamando A al centro de la circunferencia de radio b, B al centro de la circunferencia de radio a, C y D a los puntos de intersección entre ambas circunferencias y P y Q a los otros dos vértices del cuadrilátero y considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como las ecuaciones de estas dos circunferencias son:

$$\begin{cases} (A) \equiv 0 = c^2xy + b^2xz + a^2yz - [b^2x + (b^2 - c^2)y](x+y+z) \\ (B) \equiv 0 = c^2xy + b^2xz + a^2yz - [(a^2 - c^2)x + a^2y](x+y+z) \end{cases}$$

entonces, las ecuaciones de las rectas tangentes a ellas en el punto C son:

$$\begin{cases} t_A \equiv 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^2 & b^2 & b^2 \\ b^2 & b^2 - c^2 & S_C \\ b^2 & S_C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ t_B \equiv 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 - c^2 & a^2 & S_C \\ a^2 & a^2 & a^2 \\ S_C & a^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_A \equiv 0 = b^2x + S_Cy \\ t_B \equiv 0 = S_Cx + a^2y \end{cases}$$

por lo que:

$$\begin{cases} P = t_A \cap AB = (-S_C : b^2 : 0) \\ Q = t_A \cap AB = (a^2 : -S_C : 0) \end{cases}$$

y, por tanto:

$$\frac{(CQP)}{(ABC)}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a^2 & -S_C & 0 \\ -S_C & b^2 & 0 \end{vmatrix}}{(a^2-S_C)(b^2-S_C)}=\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)}{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)}$$

Finalmente, como:

$$(ABC)=\frac{\sqrt{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)}}{4}$$

resulta que el área pedida es:

$$\begin{aligned}\Delta &= 2(CQP)\\ &= 2\left[\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)}{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)}\right]\frac{\sqrt{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)}}{4}\\ &= \frac{[(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)]^{\frac{3}{2}}}{2(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)}\end{aligned}$$

Miguel-Ángel Pérez García Ortega