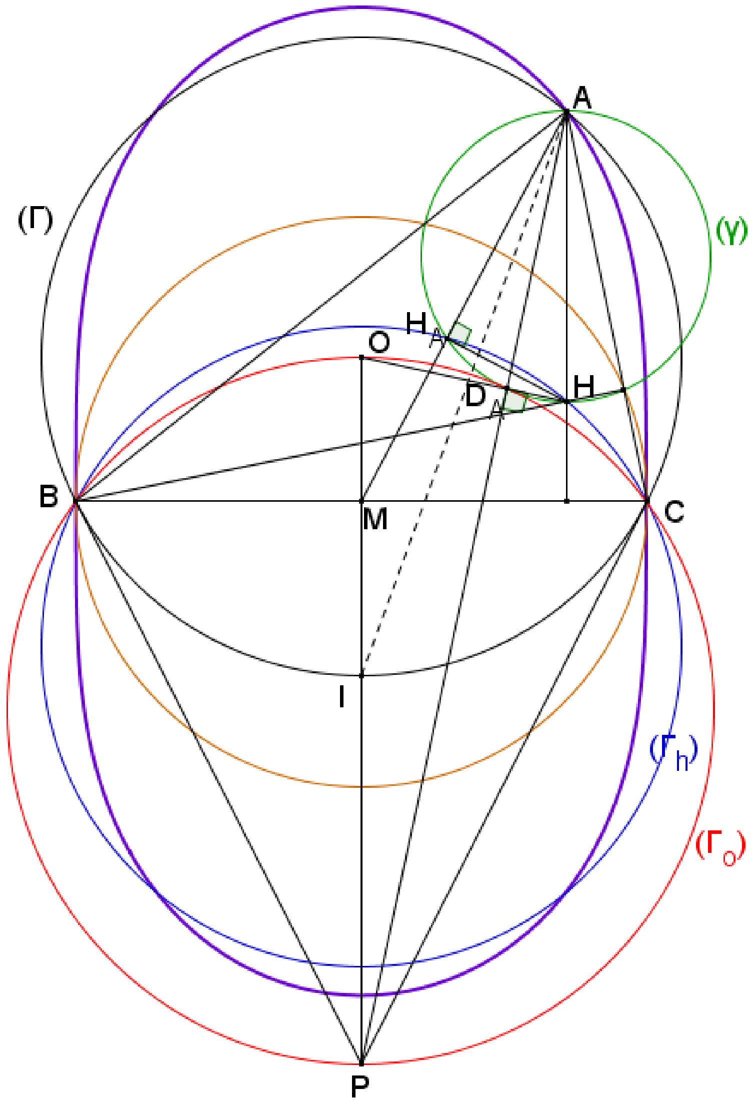
Propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega, profesor de Matemáticas en el IES "Bartolomé-José Gallardo" de Campanario (Badajoz)

Problema 1057

Dado un segmento BC, determinar el lugar geométrico que debe describir el punto A para que el ortocentro H, el A-Humpty punto H_u y el A-Dumpty punto D_u del triángulo ABC sean concíclicos con el punto A.

Pérez, M. A. (2022): Comunicación personal.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Le point H_A dans le triangle ABC ,appelé A-point de Humpty est par définition le point intérieur au triangle tel que :

$\angle H_ABC = \angle H_AAB$

$\angle H_ACB = \angle H_AAC$

Il a les propriétés suivantes que l'on supposera admises (voir en annexe) :

- H_A est sur la médiane issue de A,
- les points B,C,H l'orthocentre et H_A sont cocycliques,
-HH_A est perpendiculaire à AM en H_A.

Le point D_A dans le triangle ABC ,appelé A-point de Dumpty est par définition le point intérieur au triangle tel que :

$\angle D_ABA = \angle D_AAC$

$\angle D_AAB = \angle D_ACA$

Il a les propriétés suivantes que l'on supposera admises (voir en annexe) :

- D_A est sur la symédiane issue de A,
- les points B,C,O le centre du cercle circonscrit et D_A sont cocycliques,
-OD_A est perpendiculaire à la droite AD_A qui passe par I milieu de l'arc BC ne contenant pas A.

On désigne par (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABC et par (Γ_0) le cercle circonscrit au triangle BO.

1er cas : le triangle ABC n'est pas rectangle.

On sait que la symédiane issue de A passe par le point P qui est diamétralement opposé à O sur le cercle (Γ_0)
Si les points A,H,H_A et D_A cocycliques, il en résulte que OH est perpendiculaire à AP.

Dans un repère 2D qui admet M milieu de BC pour origine, sans perte de généralité, on définit les coordonnées de B et C par (- a,0) et (a,0), a nombre réel >0.

Soit (x,y) les coordonnées du point A. Les coordonnées (x_0,y_0) de O obéissent à l'équation :
$(x_0 - a)^2 + y_0^2 = ((x_0 + a)^2 + y_0^2$. D'où $x_0 = 0$ et $y_0 = (x + y^2 - a^2)/2y$

Les coordonnées (x_H ,y_H)de l'orthocentre H sont obtenues à l'intersection de la hauteur issue de C d'équation $yY + (x + a)(X - a) = 0$ et de la hauteur issue de A d'équation X = x.
D'où $x_H = x$ et $y_H = (a^2 - x^2)/y$.
On en déduit la pente de la droite OH : $(3a^2 - 3x^2 - y^2)/2xy$

Les coordonnées (x_P,y_P) de P sont telles que MO.MP = MB² = MC² = a².
D'où $x_P = 0$ et $y_P = -2a^2y/(x^2 + y^2 - a^2)$
On en déduit la pente de la symédiane AP : $y(x^2 + y^2 + a^2)/x(x^2 + y^2 - a^2)$

La cocyclicité des quatre points A,H,H_A et D_A est alors obtenue si :
$(3a^2 - 3x^2 - y^2)/2xy = - x(x^2 + y^2 - a^2)/ y(x^2 + y^2 + a^2)$ qui s'écrit sous la forme d'un polynôme du quatrième degré : $\mathbf{x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2a^2x^2 - 2a^2y^2 - 3a^4 = 0}$.
Le lieu du point A est alors la courbe du quatrième degré représentée en violet sur la figure supra,

2ème cas : le triangle ABC est rectangle
Les points A,H et H_A sont confondus et le lieu de A est alors le cercle de centre M et de rayon MB = MC.

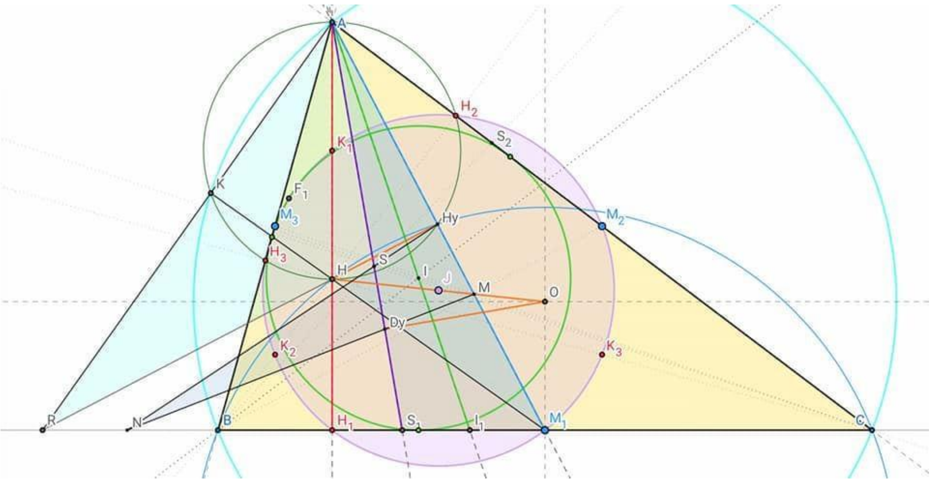
Annexe

Points centraux du triangle et points de Humpty & Dumpty

https://les-mathematiques.net/vanilla/index.php?p=/discussion/comment/2374444

Jean-Pol Coulon

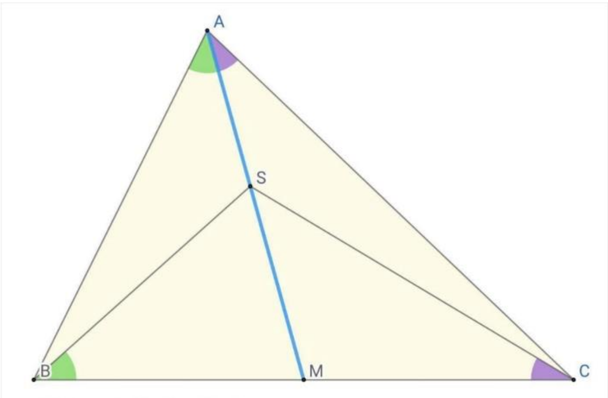
Un schéma de départ ... développé plus loin après quelques explications en introduction



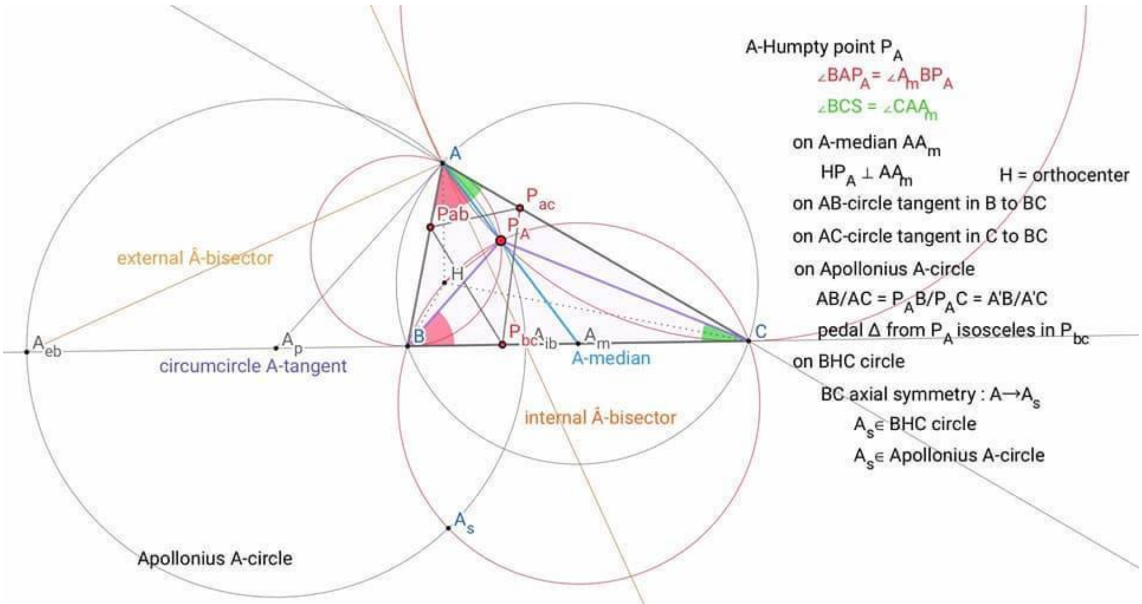
Les points Humpty et Dumpty (chacun est défini pour chaque sommet du triangle)
(on parlera donc de A- ou B- ou C- Humpty et de même pour le point Dumpty)

A-Humpty (sur la A-médiane)

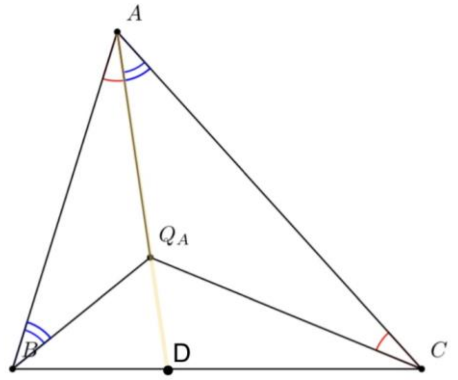
Définition par les angles



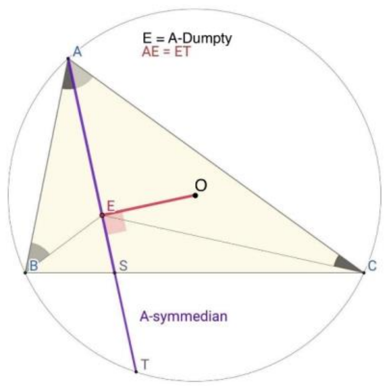
Un « concentré » de ses propriétés remarquables, la plus classique étant le projeté orthogonal de l'orthocentre sur la médiane (ici la A-médiane)



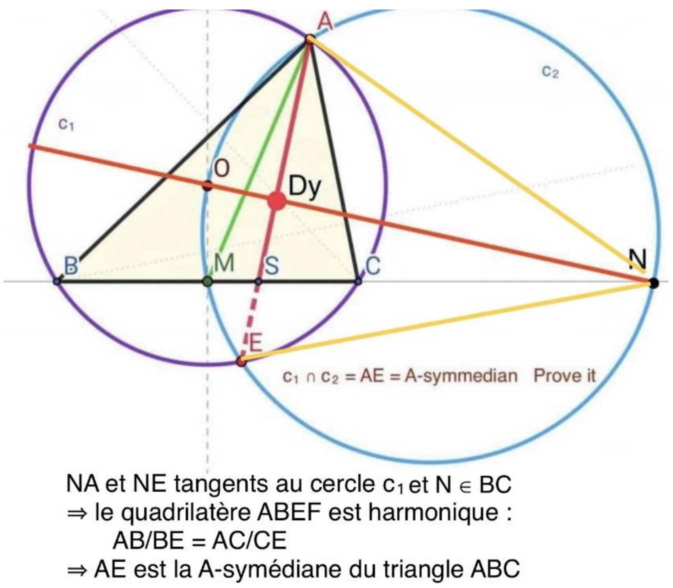
A-Dumpty (sur la A-symédiane)
Définition par les angles



Une propriété utile pour la construction de ce point
La plus classique est le projeté orthogonal du centre du triangle sur la symédiane.

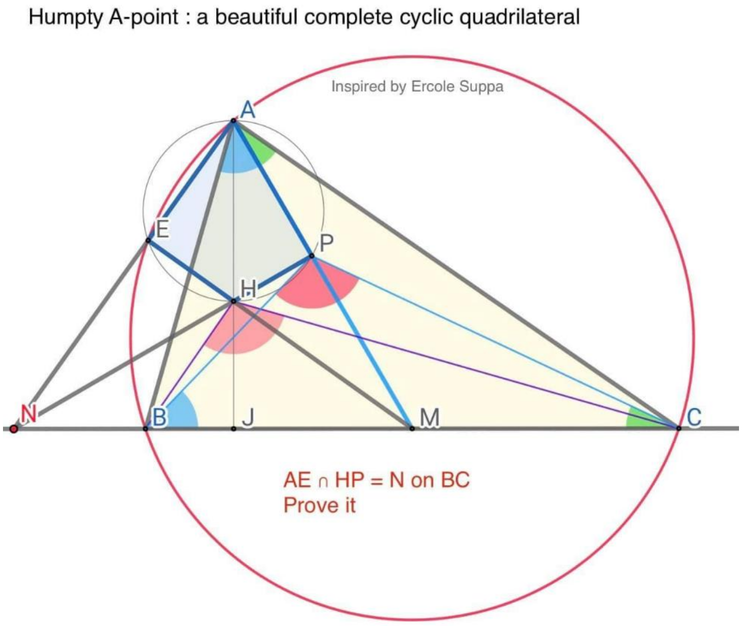


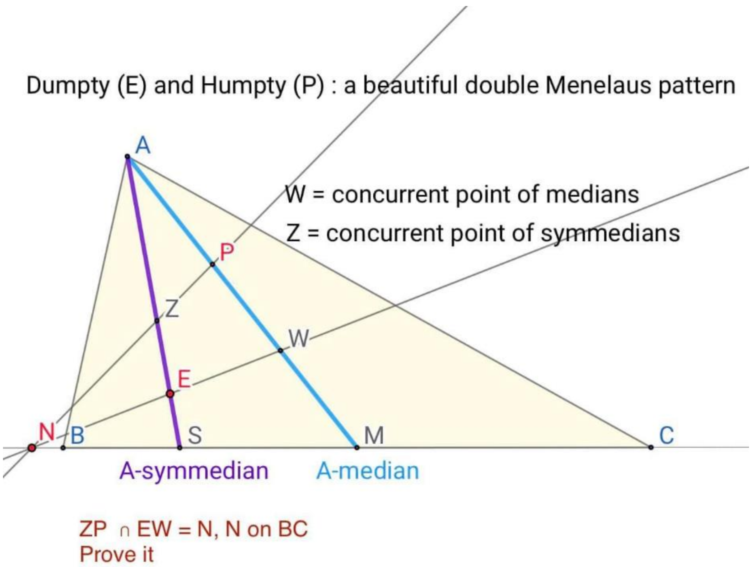
Un exemple de point de Dumpty (Dy)
Un triangle ABC, son cercle circonscrit, un deuxième cetcle construit, et donc deux cercles sécants, leur axe polaire étant la symédiane du triangle ... et le point de Dumpty

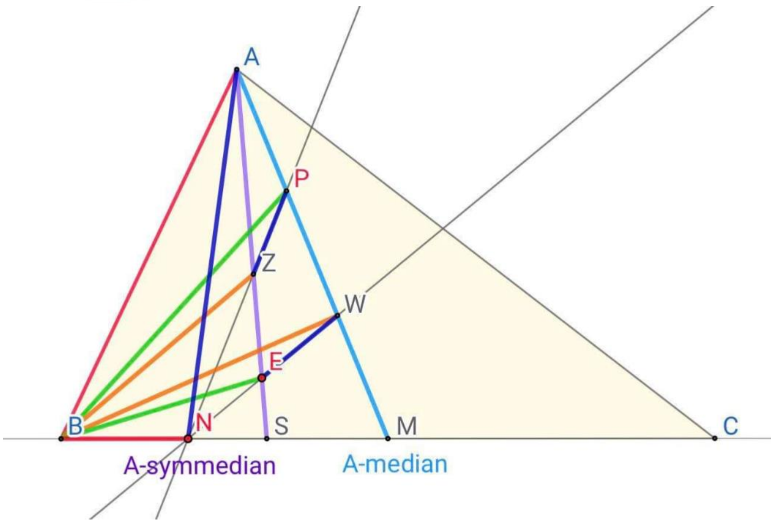


Notez :
• La symédiane en un sommet A d'un triangle est l'isogonale de la médiane par rapport aux côtés de l'angle A.
• Les points O et H utilisés dans la construction des points A-Dumpty et A-Humpty sont des points conjugués isogonaux par rapport au triangle ABC
• Les points A- (ou B- ou C-) Dumpty de même avec les points A- (ou B- ou C-) Humpty.
Pour approfondir le sujet :
http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/Docs/Etude%203.pdf
Pour revenir à mon schéma initial qui regroupe deux quadrilatères complets très différents construits avec les points A-Humpty et A-Dumpty ...

Ces deux quadrilatères sont en appui par leur(s) extension(s) sur la droite BC opposée au point A choisi pour illustrer ces propriétés remarquables (et les divisions harmoniques qui en découlent).
Plus en détails :







Explication du dernier schéma.
(AS = A- symédiane et non AN)
Par le théorème d'involution duale de Desargues (DDIT)
(B,E) (B,P) ; (B,Z) (B,W) ; (B,N) (B,A) sont toutes des paires de points isogonaux
⇒ N est sur BC