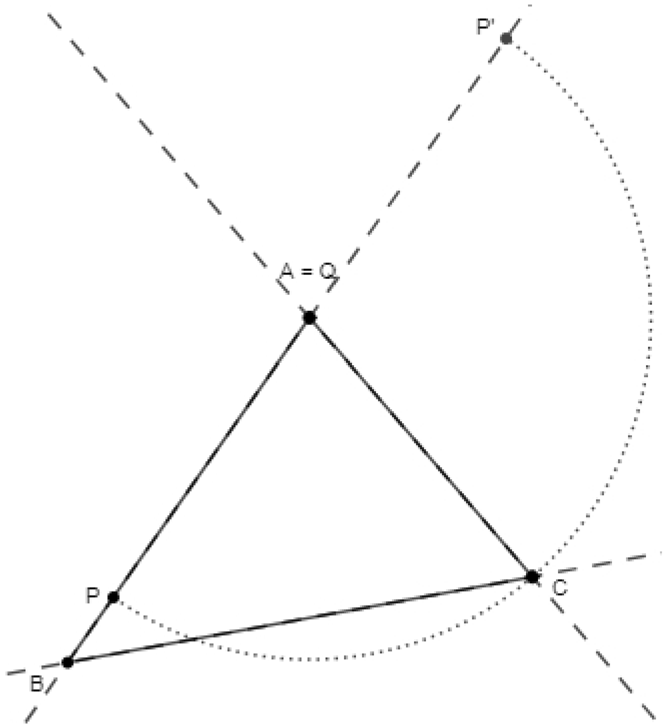
TRIÁNGULOS CABRI
1 de septiembre al 15 de octubre de 2022

Problema 1058. (propuesto por Ángel Montesdeoca) Construir, sobre los lados AB y AC de un triángulo ABC, pares de puntos P y Q, respectivamente, tales que:

$$AP = PQ = QC$$

Solución:

En primer lugar, debemos tener en cuenta que, para cualquier triángulo ABC, existen dos soluciones "triviales" (P,Q) y (P',Q), siendo $Q = A$ y $PA = b = PA'$, tal como se muestra en la siguiente figura:



en la que consideraremos que el par (P,Q) tiene orientación negativa y que el par (P',Q) tiene orientación positiva. Una vez tenido en cuenta esto, considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC,

❶ Si el par (P,Q) tiene orientación negativa, como:

$$\exists\, t \in \mathbb{R}^* : \begin{cases} P = (c-t : t : 0) \\ Q = (t : 0 : b-t) \end{cases}$$

siendo $AP^2 = t^2 = QC^2$, y:

$$PQ^2 = \frac{(-a+b+c)(a+b+c)t^2 - b(-a+b+c)(a+b+c)t + b^3 c}{bc}$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

al ser, según el Teorema del Coseno, $-a^2+b^2+c^2+bc=bc\left(1+2\cos\widehat{A}\right)$, resulta que:

$$0=PQ^2-t^2=\begin{cases}\dfrac{(t-b)[(-a^2+b^2+c^2+bc)t-b^2c]}{bc} & \dfrac{\pi}{2}\neq\widehat{A}\neq\dfrac{2\pi}{3}\\ (t-b)^2 & \widehat{A}=\dfrac{\pi}{2}\\ -b(t-b) & \widehat{A}=\dfrac{2\pi}{3}\end{cases}$$

por lo que vamos a distinguir cinco casos:

① Si $0<\widehat{A}<\frac{\pi}{2}$, como:

$$\frac{(t-b)[(-a^2+b^2+c^2+bc)t-b^2c]}{bc}=0\Rightarrow\begin{cases}t=b\\ \text{ó}\\ t=\dfrac{b^2c}{-a^2+b^2+c^2+bc}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\begin{cases}P=(c-b:b:0)\\ Q=(1:0:0)=A\end{cases}\\ \text{ó}\\ \begin{cases}P=(-a^2+c^2+bc:b^2:0)\\ Q=(bc:0:-a^2+b^2+c^2)\end{cases}\end{cases}$$

entonces, tenemos dos soluciones al problema, la trivial correspondiente y la formada por el par:

$$\begin{cases}P=(-a^2+c^2+bc:b^2:0)\\ Q=(bc:0:-a^2+b^2+c^2)\end{cases}$$

que verifica que:

☺ El punto P está situado en el interior de la semirrecta con origen en A que contiene a B, ya que su peso es:

$$-a^2+b^2+c^2+bc=bc\left(1+2\cos\widehat{A}\right)\underset{\widehat{A}<\frac{\pi}{2}<\frac{2\pi}{3}}{>}0$$

☹ $AP^2=\dfrac{b^4c^2}{(-a^2+b^2+c^2+bc)^2}=\dfrac{b^2}{\left(1+2\cos\widehat{A}\right)^2}\underset{1+2\cos\widehat{A}>0}{\Rightarrow}AP=\dfrac{b}{1+2\cos\widehat{A}}$

por lo que vamos a construir el par (P,Q) siguiendo los siguientes pasos:

⅄ Como el triángulo ATC es rectángulo, entonces, $AT=b\cos\widehat{A}$, por lo que:

$$AA'=2AT=2b\cos\widehat{A}$$

✦ Como el cuadrilátero *CAA’A’’* es un paralelogramo, entonces, $A'A''=AC=b$, por lo que, girando, con centro *A’* el punto *A’’* hasta el punto U, resulta que:

$$A'U=A'A''=b$$

y, por tanto:

$$AU=AA'+A'U=2b\cos\widehat{A}+b=b\left(1+2\cos\widehat{A}\right)$$

★ Con centro A, giramos el punto C hasta el punto *C’*, de forma que $AC'=AC=b$.

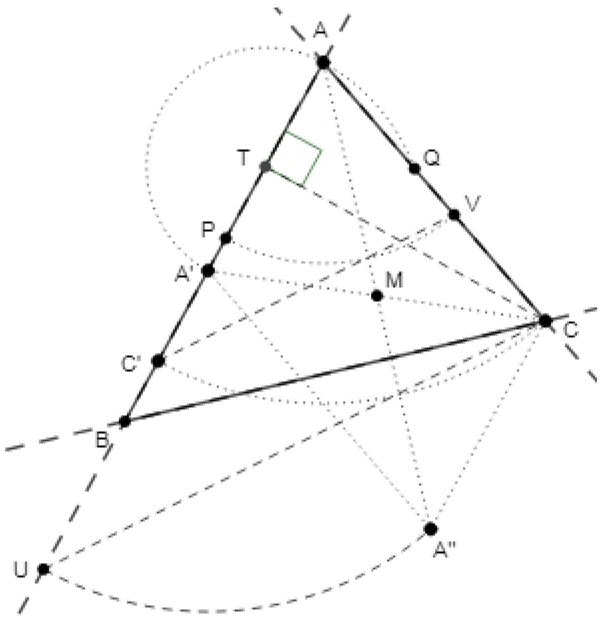
TRIÁNGULOS CABRI
1 de septiembre al 15 de octubre de 2022

✶ La recta paralela a UC pasando por C' corta a la recta AC en el punto V, de forma que los triángulos $AC'V$ y AUC son semejantes, por lo que:

$$AV = \frac{AC \cdot AC'}{AU} = \frac{b^2}{b\left(1 + 2\cos\widehat{A}\right)} = \frac{b}{1 + 2\cos\widehat{A}} = AP$$

y, por tanto, para construir el punto P, basta con girar, con centro A, el punto V hasta el punto P.

✸ Con centro P, giramos el punto A hasta el punto Q.



② Si $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$, como:

$$(t-b)^2 = 0 \Rightarrow t = b \Rightarrow \begin{cases} P = (c-b : b : 0) \\ Q = (1 : 0 : 0) = A \end{cases}$$

entonces, tenemos únicamente la solución trivial correspondiente.

③ Si $\frac{\pi}{2} < \widehat{A} < \frac{2\pi}{3}$, como:

$$\frac{(t-b)[(-a^2+b^2+c^2+bc)t - b^2c]}{bc} = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = b \\ \text{ó} \\ t = \dfrac{b^2c}{-a^2+b^2+c^2+bc} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} P = (c-b : b : 0) \\ Q = (1 : 0 : 0) = A \end{cases} \\ \text{ó} \\ \begin{cases} P = (-a^2+c^2+bc : b^2 : 0) \\ Q = (bc : 0 : -a^2+b^2+c^2) \end{cases} \end{cases}$$

entonces, tenemos dos soluciones al problema, la trivial correspondiente y la formada por el par:

$$\begin{cases} P = (-a^2+c^2+bc : b^2 : 0) \\ Q = (bc : 0 : -a^2+b^2+c^2) \end{cases}$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

que verifica que:

☺ El punto P está situado en el interior de la semirrecta con origen en A que contiene a B, ya que su peso es:

$$-a^2+b^2+c^2+bc=bc\left(1+2\cos\widehat{A}\right)\underset{\widehat{A}<\frac{2\pi}{3}}{>}0$$

☹ $AP^2=\dfrac{b^4c^2}{\left(-a^2+b^2+c^2+bc\right)^2}=\dfrac{b^2}{\left(1+2\cos\widehat{A}\right)^2}\underset{1+2\cos\widehat{A}>0}{\Rightarrow}AP=\dfrac{b}{1+2\cos\widehat{A}}$

por lo que vamos a construir el par (P,Q) siguiendo los siguientes pasos:

⅄ Como el triángulo CTA es rectángulo, entonces, $AT=b\cos\left(\pi-\widehat{A}\right)=-b\cos\widehat{A}$, por lo que:

$$AA'=2AT=-2b\cos\widehat{A}$$

✦ Con centro A, giramos el punto A' hasta el punto W, de forma que $AW=AA'=-2b\cos\widehat{A}$ y, si con centro en el punto medio M del segmento AC, giramos el punto W hasta el punto W', resulta que:

$$AW'=AC-W'C=b-AW=b+2b\cos\widehat{A}=b\left(1+2\cos\widehat{A}\right)$$

★ Con centro A, giramos el punto W' hasta el punto U y el punto C hasta el punto C', siendo:

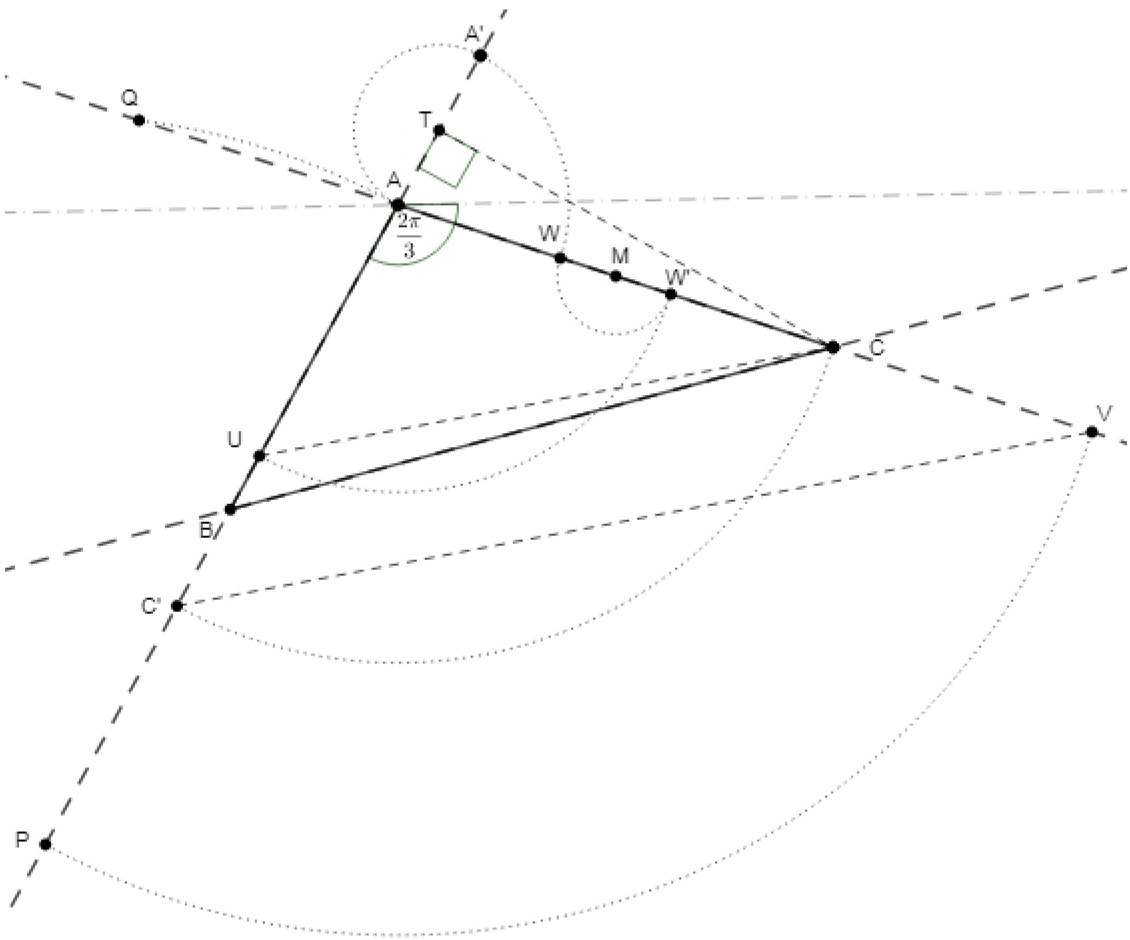
$$\begin{cases} AU=AW'=b\left(1+2b\cos\widehat{A}\right) \\ AC'=AC=b \end{cases}$$

✶ La recta paralela a UC pasando por C' corta a la recta AC en el punto V, de forma que los triángulos $AC'V$ y AUC son semejantes, por lo que:

$$AV=\frac{AC\cdot AC'}{AU}=\frac{b^2}{b\left(1+2\cos\widehat{A}\right)}=\frac{b}{1+2\cos\widehat{A}}=AP$$

y, por tanto, para construir el punto P, basta con girar, con centro A, el punto V hasta el punto P.

✷ Con centro P, giramos el punto A hasta el punto Q.



④ Si $\widehat{A} = \dfrac{2\pi}{3}$, como:

$$t - b = 0 \Rightarrow t = b \Rightarrow \begin{cases} P = (c - b : b : 0) \\ Q = (1 : 0 : 0) = A \end{cases}$$

entonces, tenemos únicamente la solución trivial correspondiente.

⑤ Si $\dfrac{2\pi}{3} < \widehat{A} < \pi$, como:

$$\frac{(t-b)[(-a^2+b^2+c^2+bc)t - b^2c]}{bc} = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = b \\ \text{ó} \\ t = \dfrac{b^2c}{-a^2+b^2+c^2+bc} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} P = (c - b : b : 0) \\ Q = (1 : 0 : 0) = A \end{cases} \\ \text{ó} \\ \begin{cases} P = (-a^2+c^2+bc : b^2 : 0) \\ Q = (bc : 0 : -a^2+b^2+c^2) \end{cases} \end{cases}$$

entonces,tenemos dos soluciones al problema, la trivial correspondiente y la formada por el par:

$$\begin{cases} P = (-a^2+c^2+bc : b^2 : 0) \\ Q = (bc : 0 : -a^2+b^2+c^2) \end{cases}$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

que verifica que:

☺ El punto P está situado en el interior de la semirrecta con origen en A que no contiene a B, ya que su peso es:

$$-a^2+b^2+c^2+bc=bc\left(1+2\cos\widehat{A}\right)\underset{\widehat{A}>\frac{2\pi}{3}}{<}0$$

☹ $AP^2=\dfrac{b^4c^2}{\left(-a^2+b^2+c^2+bc\right)^2}=\dfrac{b^2}{\left(1+2\cos\widehat{A}\right)^2}\underset{1+2\cos\widehat{A}<0}{\Rightarrow}AP=-\dfrac{b}{1+2\cos\widehat{A}}$

por lo que vamos a construir el par (P,Q) siguiendo los siguientes pasos:

- Como el triángulo CTA es rectángulo, entonces, $AT=b\cos\left(\pi-\widehat{A}\right)=-b\cos\widehat{A}$, por lo que:

$$AA'=2AT=-2b\cos\widehat{A}$$

- Con centro A, giramos el punto A' hasta el punto A'', de forma que $AA''=AA'=-2b\cos\widehat{A}$ y, si con centro en el punto medio M del segmento AA'', giramos el punto C hasta el punto C'', resulta que:

$$AC''=CA''=AA''-AC=-2b\cos\widehat{A}-b=-b\left(1+2b\cos\widehat{A}\right)$$

- Con centro A, giramos el punto C'' hasta el punto U y el punto C hasta el punto C', siendo:

$$\begin{cases} AU=AC''=-b\left(1+2b\cos\widehat{A}\right) \\ AC'=AC=b \end{cases}$$

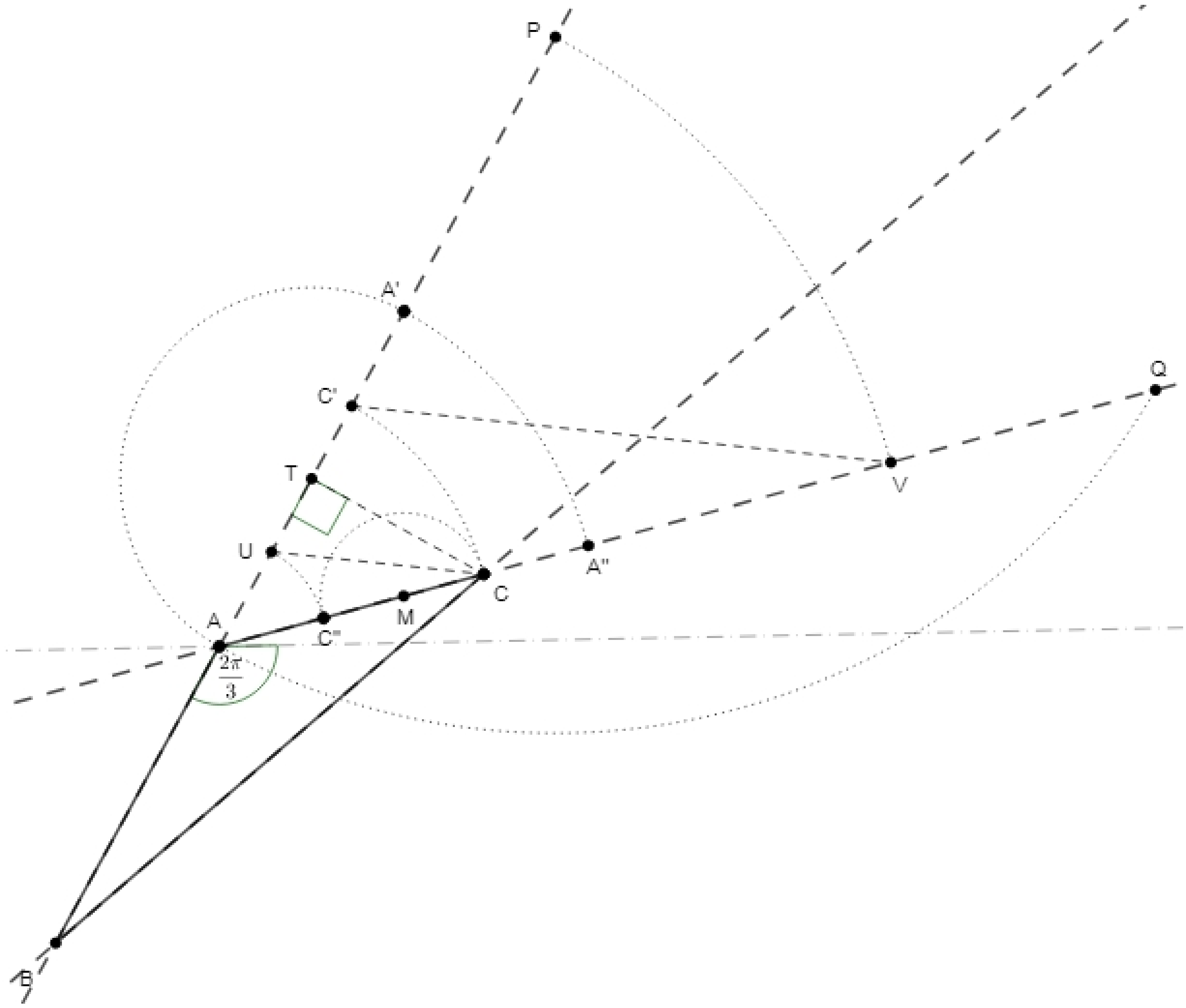
- La recta paralela a UC pasando por C' corta a la recta AC en el punto V, de forma que los triángulos $AC'V$ y AUC son semejantes, por lo que:

$$AV=\frac{AC\cdot AC'}{AU}=-\frac{b^2}{b\left(1+2\cos\widehat{A}\right)}=-\frac{b}{1+2\cos\widehat{A}}=AP$$

  y, por tanto, para construir el punto P, basta con girar, con centro A, el punto V hasta el punto P.

- Con centro P, giramos el punto A hasta el punto Q.

TRIÁNGULOS CABRI
1 de septiembre al 15 de octubre de 2022



❷ Si el par (P, Q) tiene orientación positiva, como:

$$\exists\ t \in \mathbb{R}^* : \begin{cases} P = (c - t : t : 0) \\ Q = (-t : 0 : b + t) \end{cases}$$

siendo $AP^2 = t^2 = QC^2$, y:

$$PQ^2 = \frac{(a-b+c)(a+b-c)t^2 - b(a-b+c)(a+b-c)t + b^3c}{bc}$$

al ser, según el Teorema del Coseno, $-a^2 + b^2 + c^2 - bc = bc\left(2\cos\widehat{A} - 1\right)$, resulta que:

$$0 = PQ^2 - t^2 = \begin{cases} -\dfrac{(t+b)[(-a^2+b^2+c^2-bc)t - b^2c]}{bc} & \dfrac{\pi}{2} \neq \widehat{A} \neq \dfrac{\pi}{3} \\ (t+b)^2 & \widehat{A} = \dfrac{\pi}{2} \\ b(t+b) & \widehat{A} = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

por lo que vamos a distinguir cinco casos:

① Si $0 < \widehat{A} < \frac{\pi}{3}$, como:

$$\frac{(t+b)[(-a^2+b^2+c^2-bc)t-b^2c]}{bc}=0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} t=-b \\ \text{ó} \\ t=\dfrac{b^2c}{-a^2+b^2+c^2-bc} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{l} P=(c+b:-b:0) \\ Q=(1:0:0)=A \end{array} \right. \\ \text{ó} \\ \left\{ \begin{array}{l} P=(-a^2+c^2-bc:b^2:0) \\ Q=(-bc:0:-a^2+b^2+c^2) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

entonces, tenemos dos soluciones al problema, la trivial correspondiente y la formada por el par:

$$\left\{ \begin{array}{l} P=(-a^2+c^2-bc:b^2:0) \\ Q=(-bc:0:-a^2+b^2+c^2) \end{array} \right.$$

que verifica que:

☺ El punto P está situado en el interior de la semirrecta con origen en A que contiene a B, ya que su peso es:

$$-a^2+b^2+c^2-bc=bc\left(2\cos\widehat{A}-1\right) \underset{\widehat{A}<\frac{\pi}{3}}{>} 0$$

☹ $AP^2=\dfrac{b^4c^2}{(-a^2+b^2+c^2-bc)^2}=\dfrac{b^2}{\left(2\cos\widehat{A}-1\right)^2} \underset{2\cos\widehat{A}-1>0}{\Rightarrow} AP=\dfrac{b}{2\cos\widehat{A}-1}$

por lo que vamos a construir el par (P,Q) siguiendo los siguientes pasos:

- Como el triángulo ATC es rectángulo, entonces, $AT=b\cos\widehat{A}$, por lo que:

$$AA'=2AT=2b\cos\widehat{A}$$

- Con centro A, giramos el punto C hasta el punto C', de forma que $AC'=AC=b$ y, por tanto:

$$A'C'=AA'-AC'=2b\cos\widehat{A}-b=b\left(2\cos\widehat{A}-1\right)$$

- Con centro T, giramos el punto C' hasta el punto U, de forma que:

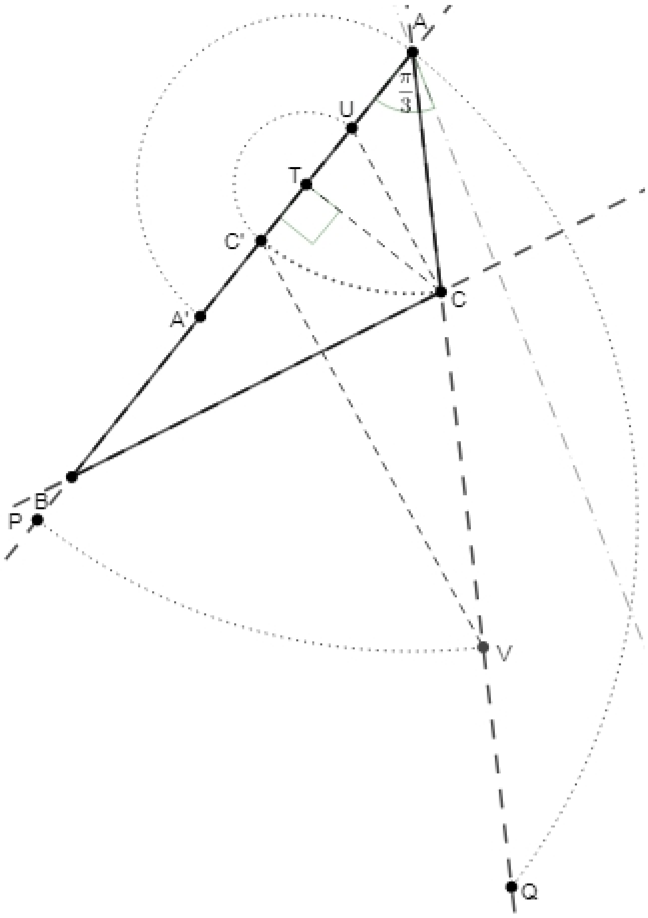
$$AU=A'C'=b\left(2\cos\widehat{A}-1\right)$$

- La recta paralela a UC pasando por C' corta a la recta AC en el punto V, de forma que los triángulos $AC'V$ y AUC son semejantes, por lo que:

$$AV=\frac{AC\cdot AC'}{AU}=\frac{b^2}{b\left(2\cos\widehat{A}-1\right)}=\frac{b}{2\cos\widehat{A}-1}=AP$$

  y, por tanto, para construir el punto P, basta con girar, con centro A, el punto V hasta el punto P.

- Con centro P, giramos el punto A hasta el punto Q.



② Si $\widehat{A}=\frac{\pi}{3}$, como:

$$t+b=0 \Rightarrow t=-b \Rightarrow \begin{cases} P=(c+b:-b:0) \\ Q=(1:0:0)=A \end{cases}$$

entonces, tenemos únicamente la solución trivial correspondiente.

③ Si $\frac{\pi}{3}<\widehat{A}<\frac{\pi}{2}$, como:

$$\frac{(t+b)[(-a^2+b^2+c^2-bc)t-b^2c]}{bc}=0 \Rightarrow \begin{cases} t=-b \\ \text{ó} \\ t=\dfrac{b^2c}{-a^2+b^2+c^2-bc} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} P=(c+b:-b:0) \\ Q=(1:0:0)=A \end{cases} \\ \text{ó} \\ \begin{cases} P=(-a^2+c^2-bc:b^2:0) \\ Q=(-bc:0:-a^2+b^2+c^2) \end{cases} \end{cases}$$

entonces, tenemos dos soluciones al problema, la trivial correspondiente y la formada por el par:

$$\begin{cases} P=(-a^2+c^2-bc:b^2:0) \\ Q=(-bc:0:-a^2+b^2+c^2) \end{cases}$$

que verifica que:

☺ El punto P está situado en el interior de la semirrecta con origen en A que no contiene a B, ya que su peso es:

$$-a^2+b^2+c^2-bc=bc\left(2\cos\widehat{A}-1\right)\underset{\frac{\pi}{3}<\widehat{A}<\frac{\pi}{2}}{<}0$$

☹ $AP^2=\dfrac{b^4c^2}{\left(-a^2+b^2+c^2-bc\right)^2}=\dfrac{b^2}{\left(2\cos\widehat{A}-1\right)^2}\underset{2\cos\widehat{A}-1<0}{\Rightarrow}AP=-\dfrac{b}{2\cos\widehat{A}-1}$

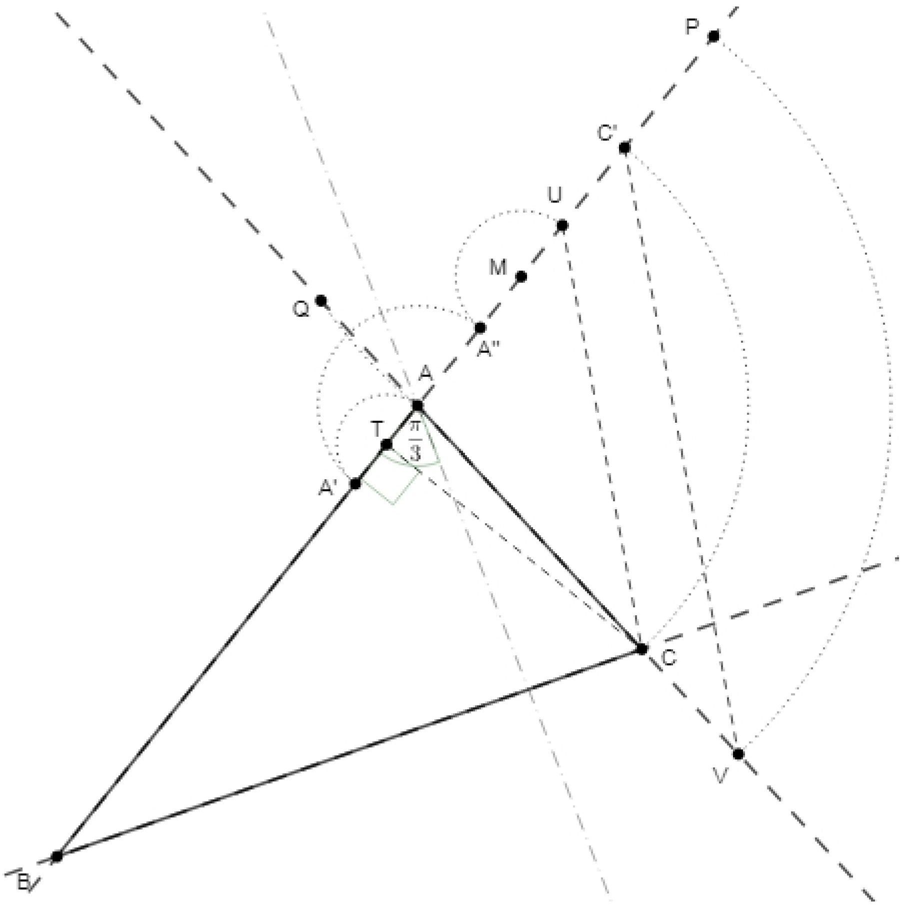
por lo que vamos a construir el par (P,Q) siguiendo los siguientes pasos:

- Como el triángulo ATC es rectángulo, entonces, $AT=b\cos\widehat{A}$, por lo que:

$$AA'=2AT=2b\cos\widehat{A}$$

- Con centro A, giramos el punto A' hasta el punto A'', de forma que $AA''=AA'=2b\cos\widehat{A}$ y el punto C hasta el punto C' y, si con centro en el punto medio M del segmento AC', giramos el punto A'' hasta el punto U, resulta que:

$$AU=C'A''=AC'-AA''=AC-AA''=b-2b\cos\widehat{A}=-b\left(2b\cos\widehat{A}-1\right)$$



✶ La recta paralela a UC pasando por C' corta a la recta AC en el punto V, de forma que los triángulos $AC'V$ y AUC son semejantes, por lo que:

$$AV = \frac{AC \cdot AC'}{AU} = \frac{b^2}{-b\left(2\cos\widehat{A} - 1\right)} = -\frac{b}{2\cos\widehat{A} - 1} = AP$$

y, por tanto, para construir el punto P, basta con girar, con centro A, el punto V hasta el punto P.

✷ Con centro P, giramos el punto A hasta el punto Q.

④ Si $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$, como:

$$t + b = 0 \Rightarrow t = -b \Rightarrow \begin{cases} P = (c + b : -b : 0) \\ Q = (1 : 0 : 0) = A \end{cases}$$

entonces, tenemos únicamente la solución trivial correspondiente.

⑤ Si $\widehat{A} > \frac{\pi}{2}$, como:

$$\frac{(t+b)[(-a^2 + b^2 + c^2 - bc)t - b^2c]}{bc} = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -b \\ \text{ó} \\ t = \dfrac{b^2c}{-a^2 + b^2 + c^2 - bc} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} P = (c + b : -b : 0) \\ Q = (1 : 0 : 0) = A \end{cases} \\ \text{ó} \\ \begin{cases} P = (-a^2 + c^2 - bc : b^2 : 0) \\ Q = (-bc : 0 : -a^2 + b^2 + c^2) \end{cases} \end{cases}$$

entonces, tenemos dos soluciones al problema, la trivial correspondiente y la formada por el par:

$$\begin{cases} P = (-a^2 + c^2 - bc : b^2 : 0) \\ Q = (-bc : 0 : -a^2 + b^2 + c^2) \end{cases}$$

que verifica que:

☺ El punto P está situado en el interior de la semirrecta con origen en A que no contiene a B, ya que su peso es:

$$-a^2 + b^2 + c^2 - bc = bc\left(2\cos\widehat{A} - 1\right) \underset{\widehat{A} > \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{3}}{<} 0$$

☹ $$AP^2 = \frac{b^4c^2}{\left(-a^2 + b^2 + c^2 - bc\right)^2} = \frac{b^2}{\left(2\cos\widehat{A} - 1\right)^2} \underset{2\cos\widehat{A} - 1 < 0}{\Rightarrow} AP = -\frac{b}{2\cos\widehat{A} - 1}$$

por lo que vamos a construir el par (P, Q) siguiendo los siguientes pasos:

⅄ Como el triángulo CTA es rectángulo, entonces, $AT = b\cos\left(\pi - \widehat{A}\right) = -b\cos\widehat{A}$, por lo que:

$$AA' = 2AT = -2b\cos\widehat{A}$$

TRIÁNGULOS CABRI
1 de septiembre al 15 de octubre de 2022

✦ Con centro A, giramos el punto C hasta el punto C', de forma que $AC' = AC = b$.

★ Con centro C, giramos el punto A hasta el punto A'', de forma que $CA'' = CA = b$ y, como el cuadrilátero $A'CA''C''$ es un paralelogramo, resulta que:

$$A'C'' = CA'' = b$$

por lo que, al girar, con centro A', el punto C'' hasta el punto U, obtenemos que:

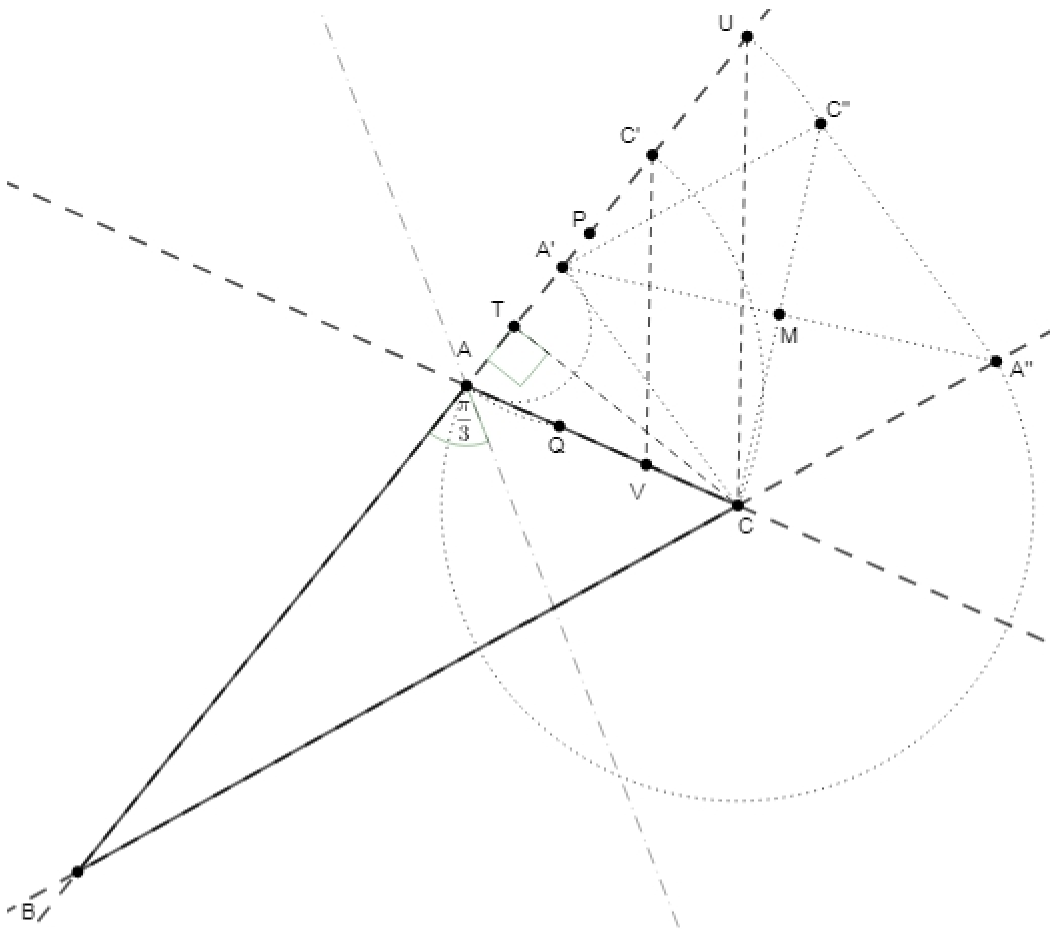
$$AU = AA' + A'U = AA' + A'C'' = -2b\cos\hat{A} + b = -b\left(2\cos\hat{A} - 1\right)$$

✶ La recta paralela a UC pasando por C' corta a la recta AC en el punto V, de forma que los triángulos $AC'V$ y AUC son semejantes, por lo que:

$$AV = \frac{AC \cdot AC'}{AU} = \frac{b^2}{-b\left(2\cos\hat{A} - 1\right)} = -\frac{b}{2\cos\hat{A} - 1} = AP$$

y, por tanto, para construir el punto P, basta con girar, con centro A, el punto V hasta el punto P.

✷ Con centro P, giramos el punto A hasta el punto Q.



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega