Pr. Cabri 1059

Enunciado

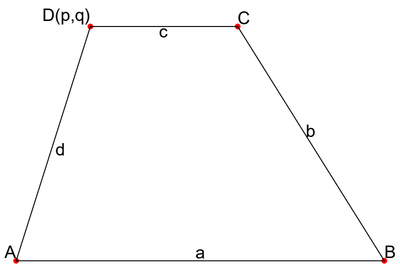
Dados 4 números positivos $a \geq b \geq c \geq d$ con $a \leq b+c+d$, construir un triángulo y una paralela a uno de sus lados tales que los lados del trapecio que determinan midan a, b, c y d.
Propuesto por César Beade

Solución

de César Beade Franco

Consideremos cuatro números positivos a, b, c y d donde ninguno es mayor que la suma de los otros 3. El problema equivale a construir un trapecio con esas medidas.
Demostraré que es posible una construcción euclídea y que (simetrías aparte) pueden construirse (aparentemante) hasta 6 trapecios diferentes con esas medidas.
Razonemos esto último. Tomando como base mayor el mayor de los números podemos construír 3 trapecios diferentes, 2 si tomamos el segundo de los números como base mayor y uno tomando el tercero.
Si mantenemos el orden de las medidas y nombramos los lados en sentido antihorario y el primero es la base (paralela) mayor los trapecios costruíbles y distintos podrían ser (a, b, c, d), (a, b, d, c), (a, c, b, d), (b, a, c, d), (b, a, d, c) y (c, a, d, b).
En la práctica parece que solo se pueden construír un máximo de 3 (nunca es constructible el caso (b,a,c,d)) y la explicación está en la ordenada de los puntos C y D.
En el dibujo aparece el trapecio (a,b,d,c) con $a = 1$, $b = \frac{3}{4}$, $c = \frac{2}{5}$ y $d = \frac{2}{3}$.

Pasemos a la poibilidad de construcción euclídea.
Sean los vértices (en sentido antihorario) A(0,0), B(a,0), C(p+c, q) y D(p,q). Nos bastará demostrar que la longitud p (o q) es costructible.



Se cumple |AD|=d y |BC|=d, de donde $p^2+q^2 = d^2$ y $(p+c-a)^2+q^2 = b^2$ de donde es fácil deducir que $p = \frac{a^2-b^2-2ac+c^2+d^2}{2(a-c)}$, que es un número constructible, lo mismo que la abscisa de C, $\frac{a^2-b^2-c^2+d^2}{2a-2c}$.
Operando un poco obtendríamos los puntos $C\left(\frac{a^2-b^2-c^2+d^2}{2a-2c}, \frac{\sqrt{-a+b+c+d}\sqrt{a+b-c-d}\sqrt{a-b-c+d}\sqrt{a+b-c+d}}{2(a-c)}\right)$ y $D\left(\frac{-b^2+(a-c)^2+d^2}{2(a-c)}, \frac{\sqrt{-a+b+c+d}\sqrt{a+b-c-d}\sqrt{a-b-c+d}\sqrt{a+b-c+d}}{2(a-c)}\right)$.
Intersecndo AD y BC obtendríamos el tercer vértice del triángulo.