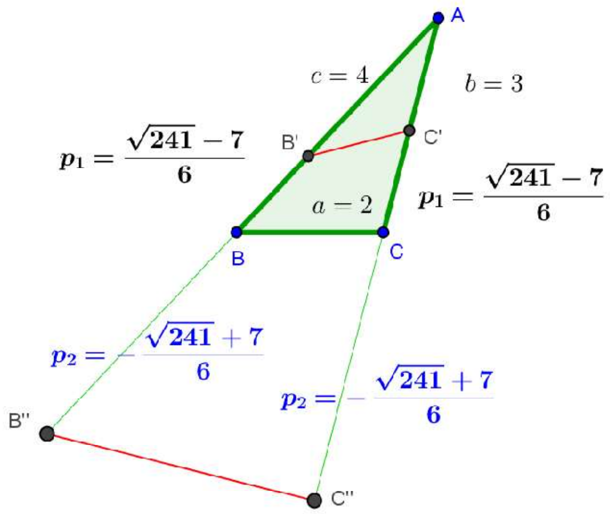
Del 16 al 31 de octubre de 2022.

Propuesto por Angel Montesdeoca Delgado, estudioso de Geometría.

***Problema* 1060.-** *Construir sobre los lados $AB$ y $AC$ de un triángulo $ABC$ pares de puntos $B'$ y $C'$, respectivamente, tales que $BB' = B'C' = C'C$.*

Fuente: Montesdecoa A, (2022): Comunicación personal

**Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.**




Elegido un punto $B'$ sobre $AB$ queda definido $C'$ sobre $AC$ por la condición $BB' = CC'$, y viceversa.

Si se toma como $C'$ el vértice $C$ del triángulo, $B'$ es el vértice $B$. El segmento $B'C'$ coincide con $BC$ y, obviamente $BB' = CC' < B'C'$.

Si tomamos $B'$ coincidiendo con $A$, el punto $C'$ (suponiendo que $c > b$) está situado en la semirrecta $CA$, fuera del lado y $B'C' = c - b < BB' = AB = c$.

Sea $\boldsymbol{OX} = \boldsymbol{OB} + t\boldsymbol{BA}$, la ecuación vectorial de la recta $BA$. La función que expresa la diferencia de longitudes $f(t) = BB' - B'C'$ es continua en todo su dominio, en particular en el intervalo $[0,1]$ y por tanto hay un punto del mismo donde se anula, es decir, EXISTEN $B'$ y $C'$ con las condiciones del problema.

En el triángulo $AB'C'$ tomando $p = BB'$ y aplicando el teorema del coseno tenemos la relación

$$(b-p)^2 + (c-p)^2 - (b-p)(c-p)\frac{-a^2+b^2+c^2}{bc} = p^2$$

Simplificando la expresión se obtiene

$$\boxed{\boldsymbol{[bc - (-a^2+b^2+c^2)]p^2 - [a^2-(b-c)^2](b+c)]p + a^2bc = 0 \quad (E)}}$$

Esta es la ecuación que ha de verificar $p$ para verificar el enunciado.

Si sustituimos $a^2$ por su expresión en función de $b$ y $c$, según el teorema del coseno, tendremos:

$bc - (-a^2+b^2+c^2) = bc(1-2\cos A)$ y $a^2 - (b-c)^2 = 2bc(1-\cos A)$ que nos permiten obtener otra expresión de la ecuación $(E)$.

$$\boxed{\boldsymbol{(1-2\cos A)p^2 - 2(b+c)(1-\cos A)p + a^2 = 0 \quad (E')}}$$

El discriminante de esta ecuación es

$$\Delta = (b+c)^2(1-\cos A)^2 - a^2(1-2\cos A) \geq a^2[(1-\cos A)^2 - (1-2\cos A)] = a^2 \cdot \cos^2 A \geq 0$$

Por tanto siempre tiene solución, como ya sabíamos.

Para el triángulo de lados 2, 3 y 4 la ecuación $(E)$ que verifica $p$ es:

$$\boldsymbol{-9p^2 - 21p + 48 = 0}$$

cuyas soluciones son $\boldsymbol{p_{\{1,2\}}} = \frac{-7\pm\sqrt{241}}{6}$. ■