TRIÁNGULOS CABRI
15 al 31 de octubre de 2022

<u>Problema 1061.</u> (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un triángulo ABC, se consideran los puntos E y F de intersección entre su A-incírculo mixtilineal y las rectas CA y AB, respectivamente, los puntos U y V de intersección entre su B-incírculo mixtilineal y las rectas AB y BC, respectivamente, y los puntos P y Q de intersección entre su C-incírculo mixtilineal y las rectas BC y CA, respectivamente. Probar que los puntos E, F, U, V, P y Q están situados sobre una elipse y determinar el centro de ésta.

<u>Solución:</u>

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, según se prueba en el Ejercicio 2564 (Lema de Verriér):

① Como la recta que pasa por el incentro $I=(a:b:c)$ del triángulo ABC y es perpendicular a la bisectriz interior (y, por tanto, paralela a la bisectriz exterior) correspondiente al vértice A:

$$2bcx - c(a-b+c)y - b(a+b-c)z = 0$$

corta a los lados AB y AC en sus puntos de tangencia con el incírculo mixtilineal, entonces, las coordenadas de dichos puntos son:

$$\begin{cases} E=(a+b-c:0:2c) \\ F=(a-b+c:2b:0) \end{cases}$$

② Como la recta que pasa por el incentro $I=(a:b:c)$ del triángulo ABC y es perpendicular a la bisectriz interior (y, por tanto, paralela a la bisectriz exterior) correspondiente al vértice B:

$$-c(-a+b+c)x + 2acy - a(a+b-c)z = 0$$

corta a los lados AB y BC en sus puntos de tangencia con el incírculo mixtilineal, entonces, las coordenadas de dichos puntos son:

$$\begin{cases} U=(2a:-a+b+c:0) \\ V=(0:a+b-c:2c) \end{cases}$$

③ Como la recta que pasa por el incentro $I=(a:b:c)$ del triángulo ABC y es perpendicular a la bisectriz interior (y, por tanto, paralela a la bisectriz exterior) correspondiente al vértice C:

$$-b(-a+b+c)x - a(a-b+c)y + 2ab = 0$$

corta a los lados AC y BC en sus puntos de tangencia con el incírculo mixtilineal, entonces, las coordenadas de dichos puntos son:

$$\begin{cases} P=(0:2b:a-b+c) \\ Q=(2a:0:-a+b+c) \end{cases}$$

Además, como la ecuación de la cónica que pasa por los puntos E, F, U, V y P es:

$$-2bc(-a+b+c)x^2 - 2ac(a-b+c)y^2 - 2ab(a+b-c)z^2 - c(a^2-6ab+b^2-c^2)xy - b(a^2-b^2-6ac+c^2)xz + a(a^2-b^2+6bc-c^2)yz = 0$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

puede comprobarse, por simple sustitución, que el punto Q está situado sobre ella, por lo que existe una cónica que pasa por los seis puntos considerados, tratándose de una elipse, ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} -4bc(-a+b+c) & -c(a^2-6ab+b^2-c^2) & -b(a^2-b^2-6ac+c^2) \\ -c(a^2-6ab+b^2-c^2) & -4ac(a-b+c) & a(a^2-b^2+6bc-c^2) \\ -b(a^2-b^2-6ac+c^2) & a(a^2-b^2+6bc-c^2) & -4ab(a+b-c) \end{vmatrix} = -2abc(a+b+c)^4(a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc)$$

$$= -2abc(a+b+c)^4[a(a-b-c)+b(-a+b-c)+c(-a-b+c)]$$

$$\neq 0$$

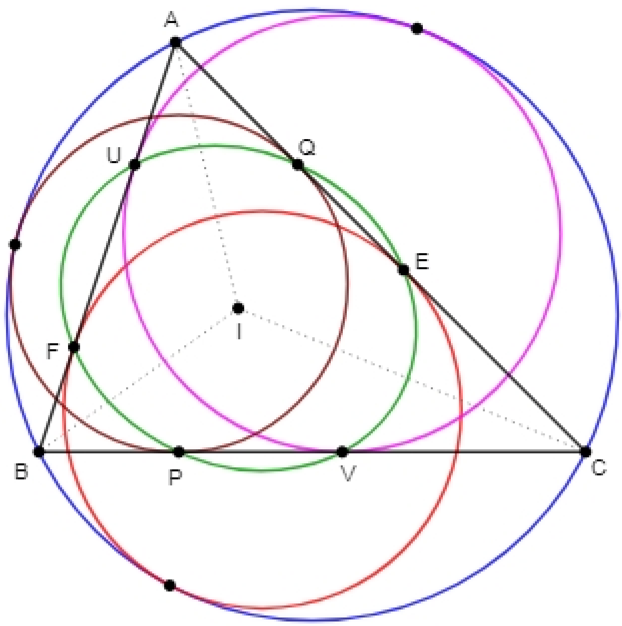
y su discriminante es:

$$\Delta = a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc = a(a-b-c)+b(-a+b-c)+c(-a-b+c) < 0$$

Finalmente, como el centro de esta elipse es el conjugado de la recta del infinito respecto de ella, podemos obtener sus coordenadas resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4bc(-a+b+c) & -c(a^2-6ab+b^2-c^2) & -b(a^2-b^2-6ac+c^2) \\ -c(a^2-6ab+b^2-c^2) & -4ac(a-b+c) & a(a^2-b^2+6bc-c^2) \\ -b(a^2-b^2-6ac+c^2) & a(a^2-b^2+6bc-c^2) & -4ab(a+b-c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4bc(-a+b+c) & -c(a^2-6ab+b^2-c^2) & -b(a^2-b^2-6ac+c^2) \\ -c(a^2-6ab+b^2-c^2) & -4ac(a-b+c) & a(a^2-b^2+6bc-c^2) \\ -b(a^2-b^2-6ac+c^2) & a(a^2-b^2+6bc-c^2) & -4ab(a+b-c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = a \\ y = b \\ z = c \end{array}\right.$$

resultando que el centro es el incentro $I = (a : b : c)$ del triángulo ABC.



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega