Pr. Cabri 1062

Enunciado

Dado un triángulo ABC se consideran los puntos U, V y W de intersección entre el circuncírculo y los incírculos mixtilineales correspondientes a los vértices A, B y C, respectivamente. A continuación se consideran las rectas ta, tb, tc, tu, tv y tw tangentes a su circunferencia circunscrita en los puntos A, B, C, U, V y W, respectivamente. Probar que

1.- Los puntos Pau = ta ∩ tu, Pbv = tb ∩ tv y Pcw = tc ∩ tw están alineados.

2.- Los puntos Av = ta ∩ tv, Aw = ta ∩ tw, Bu = tb ∩ tu, Bw = tb ∩ tw, Cu = tc ∩ tu y Cv = tc ∩ tv están situados sobre una cónica.

3.- Las rectas AvBu, BwCv y CuAw concurren en el punto X56.

4.- Los puntos B, C, V, W, Pbv y Pcw está situados sobre una cónica Ka. Además esta cónica es no degenerada si y solo si el triángulo no es rectángulo en A.

5.- Si el triángulo no es rectángulo y definimos las cónicas Kb y Kc de manera análoga, entonces Kb y Kc son tangentes en el punto Pau, Kc y Ka en Bv y Ka y Kb en Pcw.

6.- Las rectas $t_{\mathrm{cw}}^{\mathrm{ab}}$, tangente común a Ka y Kb en Pcw, $t_{\mathrm{au}}^{\mathrm{bc}}$, tangente común a Kb y Kc en Pau y $t_{\mathrm{bv}}^{\mathrm{ca}}$, tangente común a Kc y Ka en Pbv son concurrentes en X56.

7.- La polar de X56 respecto a la circunferencia circunscrita es la recta PauPbvPcw.

8.- Si llamamos E y F a los puntos de tangencia del incírculo mixtilineal correspondiente al vértice A con los lados AC y AB, respectivamente, resulta que la polar de X56 respecto a este incírculo corta a la recta EH en un punto X situado sobre la recta tu (y análogamente para los otros dos vértices).

Propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

Solución

de César Beade Franco

Se cumple el siguiente resultado general para un triángulo ABC y un punto P cualquiera.

Las cevianas AP, BP y CP cortan al circuncírculo de ABC en los puntos U, V y W, respectivamente. Consideremos las rectas ta, tb, tc, tu, tv y tw tangentes a su circunferencia circunscrita en los puntos A, B, C, U, V y W, respectivamente.

Entonces los puntos Pau = ta ∩ tu, Pbv = tb ∩ tv y Pcw = tc ∩ tw están alineados.

Una demostración analítica de este resultado la obtuve para el triángulo A(a,b), B(0,0) y C(1,0). El triángulo circunceviano relativo a un punto P(p,q) tiene vértices U($\frac{(b\,p-a\,q)\,\left(a^2+b^2+p-a\,(1+p)-b\,q\right)}{b\,\left((a-p)^2+(b-q)^2\right)}$, $\frac{(b\,p-a\,q)\,(b\,(-1+p)+q-a\,q)}{b\,\left((a-p)^2+(b-q)^2\right)}$), V($\frac{p\,\left(b\,p-a\,q+a^2\,q+b^2\,q\right)}{b\,\left(p^2+q^2\right)}$, $\frac{q\,\left(b\,p-a\,q+a^2\,q+b^2\,q\right)}{b\,\left(p^2+q^2\right)}$) y W($\frac{q\,\left(\left((-1+a)\,a+b^2\right)\,(-1+p)+b\,q\right)}{b\,\left((-1+p)^2+q^2\right)}$, $\frac{q\,\left(b-b\,p+(-1+a)\,a\,q+b^2\,q\right)}{b\,\left((-1+p)^2+q^2\right)}$).

Sus polares respectivas respecto al circuncírculo son las rectas ta,...,tw. Las intersecciones nos dan los puntos Pau, Pbv y Pcw.

Se comprueba que Det[Pau-Pbv, Pbv-Pcw] = 0, lo que indica que estos 3 puntos están alineados (1).

Apartado 1

Las rectas AU, BV y CU convergen en un punto K (2). Una demostración de esto se puede ver en (3).
Estamos en un caso particular del resultado anterior.

Apartado 2

Como consecuencia del anterior apartado, el recíproco del teorema de Pascal aplicado a los puntos Au,...,Cw tomados en el orden adecuado nos asegura que están situados sobre una cónica.

Apartado 3

Los puntos Au,...,Cw son los vértices de un exágono circunscrito a una cónica (el circuncírculo) por lo que la propiedad de este apartado se deriva del teorema de Brianchon. El punto de convergencia parece coincidir con el X56 de cierto ominoso catálogo.

Apartado 7

Las rectas ta,...,tw son los lados de un exágono circunscrito a una cónica (el circuncírculo) y sus correspondientes puntos de tangencia A,...W los vértices de otro exágono inscrito a la misma cónica. La relación entre lados y vértices es de polaridad tal como ya comentamos, así que por el principio de dualidad, la recta de Pascal del exágono inscrito es la polar del punto de Brianchon del circunscrito.

Notas

(1) Este resultado puede generalizarse más aprovechando su naturaleza proyectiva. Basta con que el triángulo ABC esté inscrito en una cónica cualquiera.

Sospecho también qu se puede justificar en base a los teoremas de Pascal y Brianchon (y sus recíprocos) y el principio de dualidad.

(2) Por K también pasa la recta IO.

(3) “Incírculos mixtilíneos”, artículo de Jafet Baca, 2018.