TRIÁNGULOS CABRI
1 al 15 de noviembre de 2022

Problema 1062. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un triángulo ABC, se consideran los puntos U, V y W de intersección entre su circunferencia circunscrita y los incírculos mixtilineales correspondientes a los vértices A, B y C, respectivamente. A continuación, se consideran las rectas t_a, t_b, t_c, t_u, t_v y t_w tangentes a su circunferencia circunscrita en los puntos A, B, C, U, V y W, respectivamente. Probar que:

① Los puntos $P_{au} = t_a \cap t_u$, $P_{bv} = t_b \cap t_v$ y $P_{cw} = t_c \cap t_w$ están alineados.

② Los puntos $A_v = t_a \cap t_v$, $A_w = t_a \cap t_w$, $B_u = t_b \cap t_u$, $B_w = t_b \cap t_w$, $C_u = t_c \cap t_u$ y $C_v = t_c \cap t_v$ están situados sobre una cónica.

③ Las rectas A_vB_u, B_wC_v y C_uA_w son concurrentes en el punto X_{56}.

④ Los puntos B, C, V, W, P_{bv} y P_{cw} están situados sobre una cónica, que llamaremos Γ_a. Además, esta cónica es no degenerada si y sólo si el triángulo ABC no es rectángulo en A.

⑤ Si el triángulo ABC no es rectángulo y se definen las cónicas Γ_b y Γ_c de forma análoga a Γ_a, entonces, Γ_b y Γ_c son tangentes en el punto P_{au}, Γ_a y Γ_c son tangentes en el punto P_{bv} y Γ_a y Γ_b son tangentes en el punto P_{cw}.

⑥ La recta t_{cw}^{ab} tangente común a Γ_a y Γ_b en el punto P_{cw}, la recta t_{bv}^{ac} tangente común a Γ_a y Γ_c en el punto P_{bv} y la t_{au}^{bc} recta tangente común a Γ_b y Γ_c en el punto P_{au} son concurrentes en el punto X_{56}.

⑦ La recta polar del punto X_{56} con respecto a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC es la recta $P_{au}P_{bv}P_{cw}$.

⑧ Si llamamos E y F a los puntos de tangencia incírculo mixtilineal correspondiente al vértice A con las rectas AC y AB, respectivamente, resulta que la recta polar del punto X_{56} con respecto a dicho incírculo mixtilineal corta a la recta EF en un punto X situado sobre la recta t_u (y, análogamente, para los otros dos vértices).

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como, según se prueba en el Ejercicio 2564 (Lema de Verriér), la recta que pasa por el incentro $I = (a : b : c)$ del triángulo ABC y es perpendicular a la bisectriz interior (y, por tanto, paralela a la bisectriz exterior) correspondiente al vértice A:

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ c-b & b & -c \\ a & b & c \end{vmatrix} = 2bcx - c(a-b+c)y - b(a+b-c)z$$

corta a los lados AB y AC en sus puntos de tangencia con el incírculo mixtilineal, entonces, las coordenadas de dichos puntos son:

$$\begin{cases} E = (a+b-c : 0 : 2c) \\ F = (a-b+c : 2b : 0) \end{cases}$$

Además, como la ecuación del incírculo mixtilineal correspondiente al vértice A es de la forma:

$$a^2yz + b^2xz + c^2xy - (ux + vy + wz)(x + y + z) = 0 \; (u, v, w \in \mathbb{R})$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

imponiendo que pase por los puntos E y F y sea tangente a la recta AC en el punto E (o a la recta AB en el punto F, da igual), obtenemos que:

$$\begin{cases} u = \dfrac{4b^2c^2}{(a+b+c)^2} \\ v = \dfrac{c^2(a-b+c)^2}{(a+b+c)^2} \\ w = \dfrac{b^2(a+b-c)^2}{(a+b+c)^2} \end{cases}$$

por lo que la ecuación de esta circunferencia es:

$$(a+b+c)^2(a^2yz+b^2xz+c^2xy)-\left[4b^2c^2x+c^2(a-b+c)^2y+b^2(a+b-c)^2z\right](x+y+z)=0$$

estando las coordenadas del punto de tangencia entre el incírculo mixtilineal y la circunferencia circunscrita al triángulo ABC determinadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0=(a+b+c)^2(a^2yz+b^2xz+c^2xy)-\left[4b^2c^2x+c^2(a-b+c)^2y+b^2(a+b-c)^2z\right](x+y+z) \\ 0=a^2yz+b^2xz+c^2xy \end{cases}$$

luego:

$$U=(a(a+b-c)(a-b+c):2b^2(a+b-c):2c^2(a-b+c))$$

y, razonando de forma totalmente análoga, llegaríamos a que:

$$\begin{cases} V=(2a^2(a+b-c):-b(-a+b+c)(a+b-c):2c^2(-a+b+c)) \\ W=(2a^2(a-b+c):2b^2(-a+b+c):-c(-a+b+c)(a-b+c)) \end{cases}$$

siendo:

$$\begin{cases} t_a \equiv 0=c^2y+b^2z \\ t_b \equiv 0=c^2x+a^2z \\ t_c \equiv 0=b^2x+a^2y \\ t_u \equiv 0=4b^2c^2x+c^2(a-b+c)^2y+b^2(a+b-c)^2z \\ t_v \equiv 0=c^2(-a+b+c)^2x+4a^2c^2y+a^2(a+b-c)^2z \\ t_w \equiv 0=b^2(-a+b+c)^2x+a^2(a-b+c)^2y+4a^2b^2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{au}=t_a\cap t_u=(a(b-c):b^2:-c^2) \\ P_{bv}=t_b\cap t_v=(-a^2:b(c-a):c^2) \\ P_{cw}=t_c\cap t_w=(a^2:-b^2:c(a-b)) \end{cases}$$

① Como:

$$\begin{vmatrix} a(b-c) & b^2 & -c^2 \\ -a^2 & b(c-a) & c^2 \\ a^2 & -b^2 & c(a-b) \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} b-c & b & -c \\ -a & c-a & c \\ a & -b & a-b \end{vmatrix}=0$$

entonces, los puntos P_{au}, P_{bv} y P_{cw} están alineados.

TRIÁNGULOS CABRI
1 al 15 de noviembre de 2022

② Considerando el hexágono $A_vA_wB_wB_uC_uC_v$, como las rectas que corresponden a lados opuestos verifican que:

$$\left\{\begin{array}{l} P_{au} = t_a \cap t_u = A_vA_w \cap B_uC_u \\ P_{bv} = t_b \cap t_v = B_wB_u \cap C_vA_v \\ P_{cw} = t_c \cap t_w = C_uC_v \cap A_wB_w \end{array}\right.$$

entonces, el recíproco del Teorema de Pascal nos asegura que estos seis puntos están situados sobre una cónica.

③ Como:

$$\left\{\begin{array}{l} A_v = t_a \cap t_v = \left(a^2(a+3b-c) : -b^2(-a+b+c) : c^2(-a+b+c)\right) \\ A_w = t_a \cap t_w = \left(a^2(-a+b-3c) : -b^2(-a+b+c).c^2(-a+b+c)\right) \\ B_u = t_b \cap t_u = \left(-a^2(a-b+c) : b^2(3a+b-c) : c^2(a-b+c)\right) \\ B_w = t_b \cap t_w = \left(a^2(a-b+c) : b^2(-a+b+3c) : -c^2(a-b+c)\right) \\ C_u = t_c \cap t_u = \left(a^2(a+b-c) : -b^2(a+b-c) : (-3a+b-c)c^2\right) \\ C_v = t_c \cap t_v = \left(a^2(a+b-c) : -b^2(a+b-c) : c^2(-a+3b+c)\right) \end{array}\right.$$

entonces:

$$\left\{\begin{array}{l} A_vB_u \equiv 0 = bc^2(-a+b+c)x + ac^2(a-b+c)y - ab(a+b)(a+b-c)z \\ B_wC_v \equiv 0 = bc(b+c)(-a+b+c)x - a^2c(a-b+c)y - a^2b(a+b-c)z \\ C_uA_w \equiv 0 = b^2c(-a+b+c)x - ac(a+c)(a-b+c)y + ab^2(a+b-c)z \end{array}\right.$$

pudiéndose comprobar, por simple sustitución, que estas tres rectas concurren en el punto:

$$X_{56} = \left(a^2(a+b-c)(a-b+c) : b^2(a+b-c)(-a+b+c) : c^2(a-b+c)(-a+b+c)\right)$$

④ Como la ecuación de la cónica que pasa por los puntos B, C, V, P_{bv} y P_{cw} es:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2a^4b^3(a-b-c)^2(a+b-c)^2c^3 & a^6b(a+b-c)^2c^3(a^2+2ab-3b^2-c^2) & a^6b^3(a+b-c)^2c(a^2-b^2+2ac-3c^2) \\ a^6b(a+b-c)^2c^3(a^2+2ab-3b^2-c^2) & 0 & a^8b(a-b-c)(a+b-c)^2c(a+b+c) \\ a^6b^3(a+b-c)^2c(a^2-b^2+2ac-3c^2) & a^8b(a-b-c)(a+b-c)^2c(a+b+c) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

puede comprobarse, por simple sustitución que el punto W está situado sobre ella, ya que sus coordenadas verifican dicha ecuación. Por tanto, los puntos B, C, V, W, P_{bv} y P_{cw} están situados sobre una cónica. Además, como:

$$\begin{vmatrix} -2a^4b^3(a-b-c)^2(a+b-c)^2c^3 & a^6b(a+b-c)^2c^3(a^2+2ab-3b^2-c^2) & a^6b^3(a+b-c)^2c(a^2-b^2+2ac-3c^2) \\ a^6b(a+b-c)^2c^3(a^2+2ab-3b^2-c^2) & 0 & a^8b(a-b-c)(a+b-c)^2c(a+b+c) \\ a^6b^3(a+b-c)^2c(a^2-b^2+2ac-3c^2) & a^8b(a-b-c)(a+b-c)^2c(a+b+c) & 0 \end{vmatrix} = 4a^20b^5(a-b-c)(a+b-c)^7c^5(a-b+c)(a+b+c)(a^2-b^2-c^2)$$

entonces, esta cónica es no degenerada si y sólo si $a^2 \neq b^2 + c^2$, es decir, si y sólo si el triángulo ABC no es rectángulo en A.

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI
1 al 15 de noviembre de 2022

⑤ Las cónicas Γ_b y Γ_c son tangentes en el punto P_{au}, las cónicas Γ_a y Γ_c son tangentes en el punto P_{bv} y las cónicas Γ_a y Γ_b son tangentes en el punto P_{cw}, ya que, en cada uno de los tres casos, ambas cónicas tienen recta tangente común en los puntos correspondientes, siendo las ecuaciones de éstas las siguientes:

$$\begin{cases} t_{au}^{bc} \equiv 0 = 2b^2c^2(-a+b+c)x - c^2(a-b+c)(a^2+b^2-c^2)y - b^2(a+b-c)(a^2-b^2+c^2)z \\ t_{bv}^{ac} \equiv 0 = (-a+b+c)c^2(a^2+b^2-c^2)x - 2a^2c^2(a-b+c)y - a^2(a+b-c)(a^2-b^2-c^2)z \\ t_{cw}^{ab} \equiv 0 = b^2(-a+b+c)(-a^2+b^2-c^2)x + a^2(a-b+c)(a^2-b^2-c^2)y + 2a^2b^2(a+b-c) \end{cases}$$

⑥ La recta t_{cw}^{ab} tangente común a Γ_a y Γ_b en el punto P_{cw}, la recta t_{bv}^{ac} tangente común a Γ_a y Γ_c en el punto P_{bv} y la t_{au}^{bc} recta tangente común a Γ_b y Γ_c en el punto P_{au} son concurrentes en el punto:

$$X_{56} = \left(a^2(a+b-c)(a-b+c) : b^2(a+b-c)(-a+b+c) : c^2(a-b+c)(-a+b+c)\right)$$

ya que las coordenadas de este punto verifican las tres ecuaciones anteriores.

⑦ Como la ecuación de la recta polar del punto X_{56} con respecto a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC es:

$$bc(-a+b+c)x + ac(a-b+c)y + ab(a+b-c)z = 0$$

puede comprobarse, por simple sustitución que los puntos P_{au}, P_{bv} y P_{cw} están situados sobre ella, por lo que dicha recta coincide con la recta $P_{au}P_{bv}P_{cw}$.

⑧ Como:

$$EF \equiv 2bcx - c(a-b+c)y - b(a+b-c)z = 0$$

y la ecuación de la recta polar del punto X_{56} con respecto al A-incírculo mixtilineal del triángulo ABC es:

$$4b^2c^2(-2a+b+c)x + c^2(a-b+c)(-a^2+4ab-b^2+c^2)y + b^2(a+b-c)(-a^2+b^2+4ac-c^2)z = 0$$

entonces, ambas rectas se cortan en el punto:

$$X = \left((b-c)(a+b-c)(a-b+c) : 2b^2(a+b-c) : -2c^2(a-b+c)\right)$$

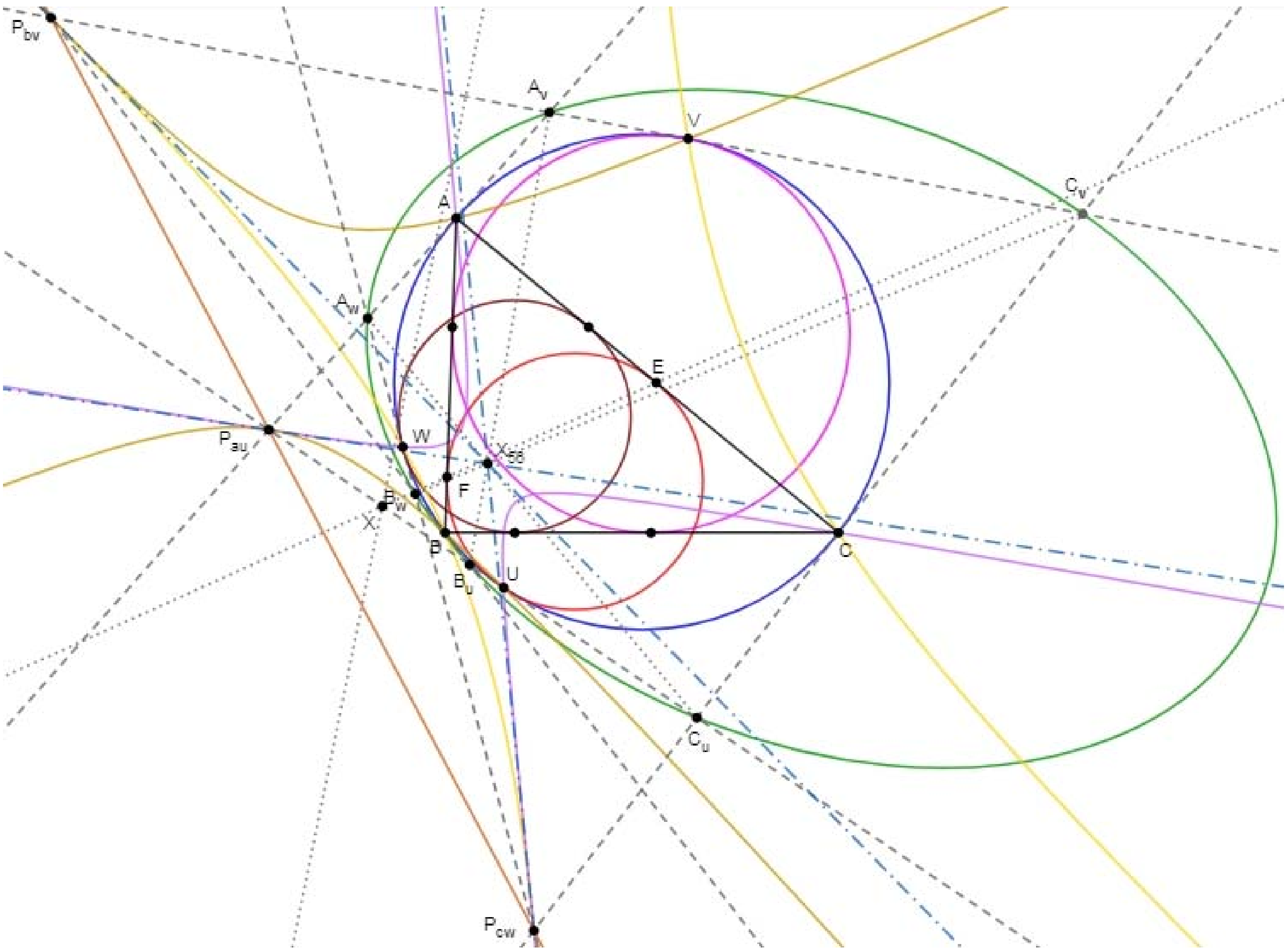
que puede comprobarse, por simple sustitución, que está situado sobre la recta:

$$t_u \equiv 4b^2c^2x + c^2(a-b+c)^2y + b^2(a+b-c)^2z = 0$$

ya que sus coordenadas verifican la ecuación de ésta.

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI
1 al 15 de noviembre de 2022



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega