TRIÁNGULOS CABRI
1 al 15 de noviembre de 2022

Problema 1063. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega y Juan-José Isach Mayo) Dado un triángulo ABC con incentro I e inradio r, se consideran el centro J y el radio ρ de su A-incírculo mixtilineal y el punto medio Q del segmento VW, donde V y W son los puntos de tangencia entre su incírculo y las rectas AC y AB, respectivamente.

① Probar que:

☺ $1 < \frac{\rho}{r} = \frac{JI}{IQ}$

😐 $\frac{\rho}{r} \leq 2 \Leftrightarrow \triangle BAC \leq \frac{\pi}{2}$, dándose la igualdad si y sólo si el triángulo ABC es rectángulo en A.

☹ $\frac{\rho}{r} \leq 1 + \frac{a^2}{(b+c)^2 - a^2}$, dándose la igualdad si y sólo si $b = c$.

② Dado un segmento BC, determinar el lugar geométrico que debe describir el punto A para que $\frac{\rho}{r} = \phi$.

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como, según se prueba en el Ejercicio 2564 (Lema de Verriér), la recta que pasa por el incentro $I = (a : b : c)$ del triángulo ABC y es perpendicular a la bisectriz interior (y, por tanto, paralela a la bisectriz exterior) correspondiente al vértice A:

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ c-b & b & -c \\ a & b & c \end{vmatrix} = 2bcx - c(a-b+c)y - b(a+b-c)z$$

corta a los lados AB y AC en sus puntos de tangencia con el incírculo mixtilineal, entonces, las coordenadas de dichos puntos son:

$$\begin{cases} E = (a+b-c : 0 : 2c) \\ F = (a-b+c : 2b : 0) \end{cases}$$

Además, como la ecuación del incírculo mixtilineal correspondiente al vértice A es de la forma:

$$a^2yz + b^2xz + c^2xy - (ux + vy + wz)(x + y + z) = 0 \ (u, v, w \in \mathbb{R})$$

imponiendo que pase por los puntos E y F y sea tangente a la recta AC en el punto E (o a la recta AB en el punto F, da igual), obtenemos que:

$$\begin{cases} u = \dfrac{4b^2c^2}{(a+b+c)^2} \\ v = \dfrac{c^2(a-b+c)^2}{(a+b+c)^2} \\ w = \dfrac{b^2(a+b-c)^2}{(a+b+c)^2} \end{cases}$$

por lo que la ecuación de esta circunferencia es:

$$(a+b+c)^2(a^2yz + b^2xz + c^2xy) - \left[4b^2c^2x + c^2(a-b+c)^2y + b^2(a+b-c)^2z\right](x+y+z) = 0$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

siendo su centro (conjugado de la recta del infinito) el punto:

$$J=(-a^3+b^3+c^3-a^2b+ab^2-a^2c-b^2c+ac^2-bc^2+2abc:4b^2c:4bc^2)$$

① Como:

$$\begin{cases} r^2=\dfrac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4(a+b+c)} \\ \rho^2=JE^2=\dfrac{4b^2c^2(a-b+c)(a+b-c)}{(-a+b+c)(a+b+c)^3} \end{cases} \Rightarrow \frac{\rho^2}{r^2}=\frac{16b^2c^2}{(-a+b+c)^2(a+b+c)^2}$$

entonces:

$$\frac{\rho}{r}=\frac{4bc}{(-a+b+c)(a+b+c)}$$

Además:

☺ Como:

$$\begin{cases} V=(a+b-c:0:-a+b+c) \\ W=(a-b+c:-a+b+c:0) \end{cases} \Rightarrow Q=(a(b+c)-(b-c)^2:b(-a+b+c):c(-a+b+c))$$

entonces:

$$I=2bcQ+\left[\frac{(-a+b+c)(a+b+c)}{2}\right]J$$

por lo que:

$$\frac{JI}{IQ}=\frac{2bc}{\dfrac{(-a+b+c)(a+b+c)}{2}}=\frac{4bc}{(-a+b+c)(a+b+c)}=\frac{\rho}{r}$$

siendo, además:

$$\frac{4bc}{(-a+b+c)(a+b+c)}-1=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(-a+b+c)(a+b+c)}>0$$

y, por tanto:

$$1<\frac{4bc}{(-a+b+c)(a+b+c)}=\frac{\rho}{r}=\frac{JI}{IQ}$$

😐 Como:

$$\frac{4bc}{(-a+b+c)(a+b+c)}-2=-\frac{2(-a^2+b^2+c^2)}{(-a+b+c)(a+b+c)}$$

entonces:

$$\frac{\rho}{r}=\frac{4bc}{(-a+b+c)(a+b+c)}\le 2 \Leftrightarrow -a^2+b^2+c^2\ge 0 \Leftrightarrow \measuredangle BAC\le\frac{\pi}{2}$$

dándose la igualdad si y sólo si $a^2 = b^2 + c^2$, es decir, si y sólo si el triángulo ABC es rectángulo en A.

☹ Como $b, c \in (0, +\infty)$, aplicando la desigualdad existente entre las medias aritmética y geométrica, resulta que:

$$\sqrt{bc} \le \frac{b+c}{2} \Rightarrow bc \le \frac{(b+c)^2}{4}$$

dándose la igualdad si y sólo si $b = c$, por lo que:

$$\frac{\rho}{r} = \frac{4bc}{(-a+b+c)(a+b+c)} \le \frac{(b+c)^2}{(-a+b+c)(a+b+c)} = \frac{(b+c)^2}{(b+c)^2 - a^2} = 1 + \frac{a^2}{(b+c)^2 - a^2}$$

dándose la igualdad si y sólo si $b = c$.

② Como:

$$\frac{\rho}{r} = \phi \Leftrightarrow \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 - \frac{\rho}{r} - 1 = 0$$

entonces, $\frac{\rho}{r} = \phi$ si y sólo si:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{16b^2c^2}{(-a+b+c)^2(a+b+c)^2} - \frac{4bc}{(-a+b+c)(a+b+c)} - 1 \\ &= -\frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 8a^2bc + 8b^3c - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + 8bc^3 + c^4}{(-a+b+c)^2(a+b+c)^2} \end{aligned}$$

es decir, si y sólo si:

$$\begin{aligned} 0 &= a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 8a^2bc + 8b^3c - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + 8bc^3 + c^4 \\ &= \left[-a^2 + b^2 + c^2 - 2bc\left(\sqrt{5} - 2\right)\right]\left[-a^2 + b^2 + c^2 - 2bc\left(\sqrt{5} + 2\right)\right] \\ &= 4b^2c^2\left[\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} - \left(\sqrt{5} - 2\right)\right]\left[\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} - \left(\sqrt{5} + 2\right)\right] \\ &= 4b^2c^2\left[\cos A - \left(\sqrt{5} - 2\right)\right]\left[\cos A - \left(\sqrt{5} + 2\right)\right] \end{aligned}$$

lo cual significa que:

$$\frac{\rho}{r} = \phi \Leftrightarrow \cos A = \sqrt{5} - 2$$

y, por tanto, el lugar geométrico pedido es el arco capaz de ángulo $\arccos(\sqrt{5} - 2)$ del segmento BC.