TRIÁNGULOS CABRI
EDICIÓN FINAL

Problema 1064. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un número primo p, en el plano afín sobre un cuerpo $\Bbbk$ de característica $\sharp\Bbbk \geq p$, se consideran un triángulo ABC y puntos $Q_1, ..., Q_{p-1}$ que dividen al segmento BC en p partes iguales. Probar que:

① Las rectas $AQ_1, ..., AQ_{p-1}$ son coincidentes si y sólo si $\sharp\Bbbk = p$.

② $\forall\ i \in \{1, ..., p-1\} : AQ_i \parallel BC \Leftrightarrow \sharp\Bbbk = p$

Solución:

Como:

$$\forall\ k \in \{1, ..., p-1\} : BQ_k : Q_kC = k : (p-k)$$

entonces, considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, resulta que:

$$\forall\ k \in \{1, ..., p-1\} : Q_k = (0 : p-k : k)$$

① Tenemos que probar la doble implicación:

$\Rightarrow$

Si rectas $AQ_1, ..., AQ_{p-1}$ son coincidentes, entonces:

$$\forall\ i, j \in \{1, ..., p-1\}\ /\ i < j : Q_i = AQ_i \cap BC = AQ_j \cap BC = Q_j$$

por lo que:

$$0 = \begin{vmatrix} p-i & i \\ p-j & j \end{vmatrix} = (j-i)p \underset{0<j-i\leq p-2<p \Rightarrow j-i\neq 0}{\overset{\Bbbk \text{ íntegro}}{\Rightarrow}} p = 0 \Rightarrow \sharp\Bbbk \mid p \underset{\sharp\Bbbk \geq p}{\Rightarrow} \sharp\Bbbk = p$$

$\Leftarrow$

Si $\sharp\Bbbk = p$, entonces:

$$\forall\ k \in \{1, ..., p-1\} : Q_k = (0 : p-k : k) \underset{p=0}{=} (0 : -k : k) \underset{k\neq 0}{=} (0 : 1 : -1) \in \text{recta}_\infty\ (x+y+z=0)$$

por lo que rectas $AQ_1, ..., AQ_{p-1}$ son todas paralelas, ya que tienen el mismo punto de infinito. Además, como todas ellas pasan por el punto A, entonces, son coincidentes.

② Tenemos que probar la doble implicación:

$\Rightarrow$

Si:

$$\forall\ i \in \{1, ..., p-1\} : AQ_i \parallel BC$$

entonces:

$$\forall\ i \in \{1, ..., p-1\} : AQ_i^\infty = BC^\infty = (0 : 1 : -1)$$

y como:

$$\forall\ i \in \{1, ..., p-1\} : AQ_i \equiv 0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & p-i & i \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = iy - (p-i)z$$

al ser:

$$\forall\ i \in \{1, ..., p-1\} : (0 : 1 : -1) = AQ_i^{\infty} = (i + p - i : -(p-i) - 0 : 0 - i) = (p : i - p : -i)$$

entonces:

$$p = 0 \Rightarrow \sharp\mathbb{k}\ \mid\ p \underset{\sharp\mathbb{k} \geq p}{\Rightarrow} \sharp\mathbb{k} = p$$

$\Leftarrow$

Si $\sharp\mathbb{k} = p$, entonces:

$$\forall\ i \in \{1, ..., p-1\} : Q_i = (0 : p - i : i) \underset{p=0}{=} (0 : -i : i) \underset{i \neq 0}{=} (0 : 1 : -1) = BC^{\infty}$$

por lo que:

$$\forall\ i \in \{1, ..., p-1\} : AQ_i^{\infty} = BC^{\infty}$$

y, por tanto:

$$\forall\ i \in \{1, ..., p-1\} : AQ_i \parallel BC$$