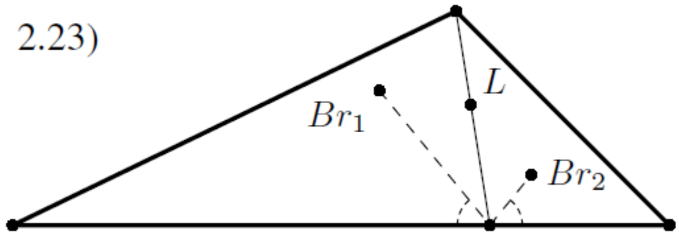
Problema 1066.

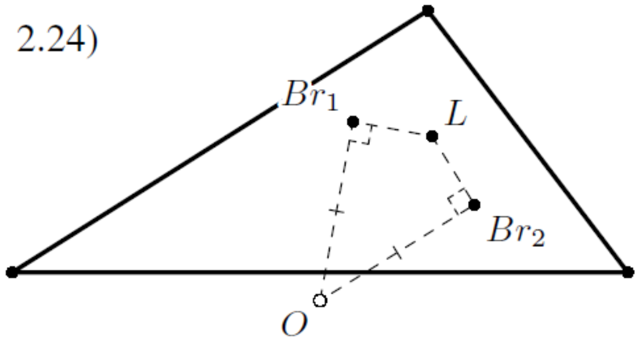
Sea un triángulo ABC.Sean Br_1 Br_2 sus puntos de Brocard.

a) Sea T el pie de la simediana del vértice A.

Probar que los triángulos BBr_1T y CBr_2T son semejantes.

Probar que $OBr_1=OBr_2$, $LBr_1=LBr_2$, $<OBr_1L=<OBr_2L=90^o$





Akopyan, A. (2019): Figures sans paroles. (2.23, 2.24)

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

On désigne par a,b et c les côtés BC,CA er AB du triangle ABC.

Le problème se résout rapidement à l'aide des coordonnées barycentriques homogènes (supposées connues***) du centre O du cercle circonscrit des triangle ABC, du point de Lemoine L et des deux points de Brocard Br_1 et Br_2, à savoir :

O : $[(b^2 + c^2 - a^2)/b^2c^2, (c^2 + a^2 - b^2)/c^2a^2,(a^2 + b^2 - c^2)/a^2b^2]$

L : $[1/b^2, 1/a^2, c^2/a^2b^2]$

Br_1 : $[1/b^2, 1/c^2, 1/a^2]$

Br_2 : $[1/c^2, 1/a^2, 1/b^2]$

Par ailleurs on utilise la propriété bien connue de la symédiane selon laquelle le point T pied de la symédiane issue de A sur BC obéit à la relation $TB/TC = c^2/b^2$.

Les triangles BBr_1T et CBr_2T sont semblables.

Les points de Brocard sont caractérisés par l'angle de Brocard $\omega = \angle Br_1BT = \angle Br_2CT$.

Soient h_1 et h_2 les hauteurs issues de Br_1 et Br_2 dans les triangles BBr_1T et CBr_2T. Le ratio h_1/h_2 est égal à la première coordonnée barycentrique de Br_1 rapportée à la première coordonnée barycentrique de Br_2, soit $h_1/h_2 = (1/b^2)/(1/c^2) = c^2/b^2 = TB/TC$.

Les deux hauteurs étant vues sous le même angle ω, les deux triangles BBr_1T et CBr_2T sont bien semblables avec un rapport d'homothétie = $c^2./b^2$.

Les distances OBr_1 et OBr_2 sont égales.

Les vecteurs correspondant à ces deux distances ont pour composantes :

OBr_1 : $[1/b^2 - (b^2 + c^2 - a^2)/b^2c^2, 1/c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)/c^2a^2, 1/a^2 - (a^2 + b^2 - c^2)/a^2b^2]$

Soit $[(a^2 - b^2)/b^2c^2, (b^2 - c^2)/c^2a^2, (c^2 - a^2)/a^2b^2]$

OBr_2 : $[1/c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)/b^2c^2, 1/a^2 - (c^2 + a^2 - b^2)/c^2a^2, 1/b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)/a^2b^2]$

Soit $[(a^2 - c^2)/b^2c^2, (b^2 - a^2)/c^2a^2, (c^2 - b^2)/a^2b^2]$

On utilise le théorème suivant :

Theorem 7 (Distance Formula). *Consider a displacement vector* $\overrightarrow{PQ} = (x, y, z)$. *Then*

$$|PQ|^2 = -a^2yz - b^2zx - c^2xy$$

D'où $a^2b^2c^2.OBr_1^2 = (c^2 - b^2)(c^2 - a^2) +(b^2 - a^2)(c^2 - a^2) + (b^2 - a^2)(b^2 - c^2)$

puis $a^2b^2c^2.OBr_2^2 = (b^2 - c^2)(b^2 - a^2) + (c^2 - a^2)(c^2 - b^2) + (c^2 - a^2)(b^2 - a^2)$

Le deux seconds membres sont identiques.

Les triangles OBr_1L et OBr_2L sont rectangles avec les angles droits en Br_1 et Br_1.
Le vecteur LBr_1 a pour composantes : $[0, (a^2 - c^2)/c^2a^2, (b^2 - c^2)/b^2c^2]$
On utilise le théorème suivant :

Theorem 4 (Evan's Favorite Forgotten Trick). *Consider displacement vectors* $\overrightarrow{MN} = (x_1, y_1, z_1)$ *and* $\overrightarrow{PQ} = (x_2, y_2, z_2)$. *Then* $MN \perp PQ$ *if and only if*

$$0 = a^2(z_1y_2 + y_1z_2) + b^2(x_1z_2 + z_1x_2) + c^2(y_1x_2 + x_1y_2)$$

LBr_1 est donc perpendiculaire à OBr_1 si st seulement si :
$0 = (b^2 - c^2)(c^2 - b^2) + (a^2 - c^2)^2 + (b^2 - c^2)(b^2 - a^2) + (a^2 - c^2)(b^2 - a^2)$
Le second membre s'écrit encore :
$(a^2 - c^2)^2 - (b^2 - c^2)^2 + (b^2 - a^2)(a^2 + b^2 - 2c^2) = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - 2c^2) + (b^2 - a^2)(a^2 + b^2 - 2c^2) = 0$
De la même manière LBr_2 est perpendiculaire à OBr_2.

*** Voir Barycentric coordinates for the impatient de Max Schindler et Evan Chen
https://web.evanchen.cc/handouts/bary/bary-short.pdf